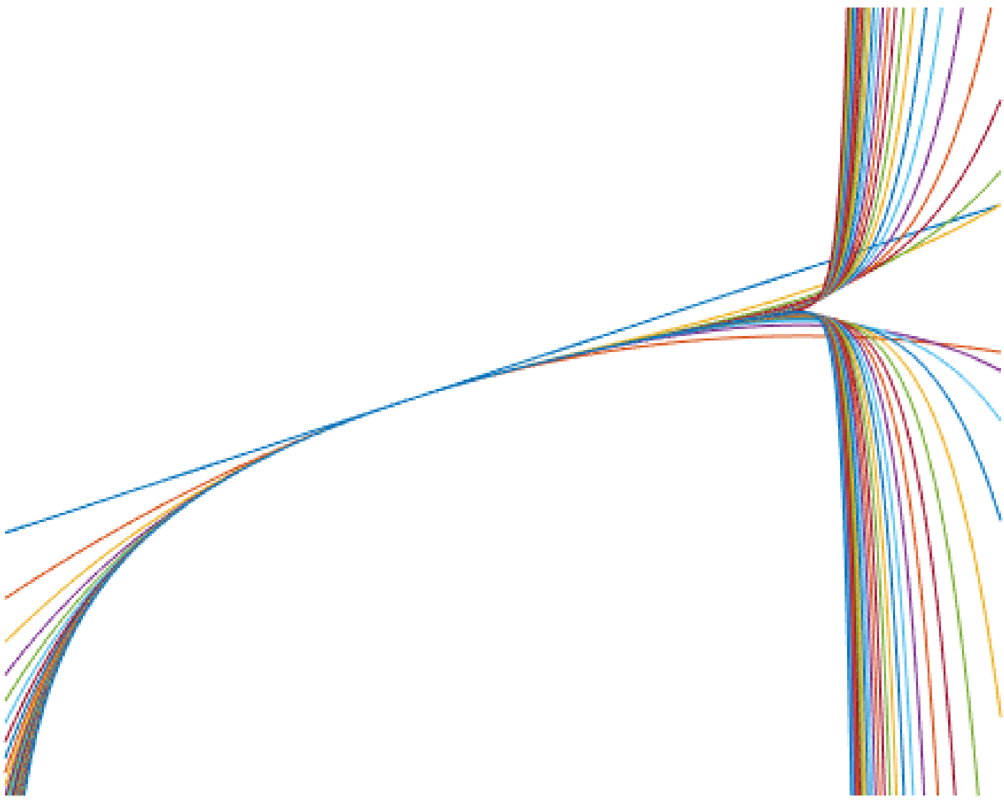
Analisi Matematica 1

Francesco Sorce

Appunti del corso tenuto dai proff.
Novaga Matteo e Carminati Carlo.



Università di Pisa
Dipartimento di Matematica

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Capitolo 1

Nozioni di Base

1.1 Insiemi e Logica

Definizione 1.1 (Insieme).
Un Insieme è una "collezione di elementi" A sulla quale possiamo chiederci se $x \in A$ per un qualsiasi oggetto x. Sia $\emptyset$ l'insieme tale che $x \notin \emptyset$ per un qualsiasi x.

Definizione 1.2 (Predicato e Proposizione).
Un Predicato P è una *affermazione* che riguarda elementi di un insieme e che è necessariamente *vera* o *falsa*. Se le variabili del predicato *assumono* un dato *valore* o sono *quantificate* allora il predicato è una *Proposizione*.

Osservazione 1.3 (De Morgan).
$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ e $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

Osservazione 1.4.
$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ e $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Osservazione 1.5.
$\neg(\forall x\ P(x)) = \exists x\ \neg P(x)$ e $\neg(\exists x\ P(x)) = \forall x\ \neg P(x)$

Definizione 1.6 (Sottoinsiemi).
A è un sottoinsieme di B ($A \subseteq B$) se $\forall x \in A, x \in B$

Definizione 1.7 (Operazioni tra insiemi).
Definiamo le seguenti operazioni:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Intersezione
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Unione
$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Differenza
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$	Prodotto Cartesiano
$A^c = U \backslash A$	Complementare

Dove U è un insieme ambiente.

Per comodità indichiamo $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ volte}}$ con A^n.

Osservazione 1.8.
$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ e $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

Definizione 1.9 (Insieme delle Parti).
Sia $\mathcal{P}(A) \doteqdot \{B \mid B \subseteq A\}$ l'Insieme delle Parti di A.

Definizione 1.10 (Partizione).
Dato A insieme, $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ è una Partizione di A se:

- $\forall U \in P\ U \neq \emptyset$
- $\forall x \in A\ \exists U \in P : x \in U$
- $\forall U_1, U_2 \in P, U_1 \neq U_2 \implies U_1 \cap U_2 = \emptyset$

1.2 Relazioni

Definizione 1.11 (Relazione)**.**
Una Relazione su A è un elemento di $\mathcal{P}(A \times A)$. Equivalentemente è un predicato che dipende da due variabili, entrambe in A.

1.2.1 Relazione di Equivalenza

Definizione 1.12 (Relazione di Equivalenza)**.**
Una relazione R è di Equivalenza se rispetta le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{lll} \forall x \in A & (x, x) \in R & \text{Riflessiva} \\ \forall x, y \in A & (x, y) \in R \implies (y, x) \in R & \text{Simmetrica} \\ \forall x, y, z \in A & (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R & \text{Transitiva} \end{array}$$

Definizione 1.13 (Classe di Equivalenza)**.**
La Classe di Equivalenza di $x \in A$ definita dalla relazione di equivalenza R è l'insieme $[x]_R \doteqdot \{y \in A \mid (x, y) \in R\}$. Se la relazione è chiara possiamo indicare la classe con $[x]$ o $\bar{x}$.

Definizione 1.14 (Insieme Quoziente)**.**
Sia $\sim$ una relazione di equivalenza. $A/_{\sim} \doteqdot \{[x]\}_{x \in A}$ è l'insieme quoziente di A per $\sim$.

Osservazione 1.15.
$A/_{\sim}$ è una partizione di A.

1.2.2 Ordinamenti

Definizione 1.16 (Relazione antisimmetrica)**.**
Una relazione R è Antisimmetrica se $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y$.

Definizione 1.17 (Ordinamento)**.**
Una Relazione d'Ordine o Ordinamento è una relazione che rispetta le proprietà Riflessiva, Antisimmetrica e Transitiva.

Definizione 1.18 (Ordinamento Totale)**.**
'$\leq$' relazione d'ordine su A è *totale* se

$$\forall x, y \in A \; x \leq y \vee y \leq x$$

Se per $B \subseteq A$ abbiamo $\leq |_B$ ordine totale su B allora B è una *catena*

Definizione 1.19 (Buon Ordinamento)**.**
$(A, \leq)$ catena è *ben ordinato* se

$$\forall B \subseteq A, B \neq \emptyset \text{ inferiormente limitato } \exists x \in B \; t.c. \; x \leq y \; \forall y \in B$$

Definizione 1.20 (Massimo)**.**
Data A catena e $x \in A$, se $\forall y \in A, y \leq x$ allora x è un *massimo* per A. Se A ammette massimo esso viene indicato con $\max A$.

Definizione 1.21 (Elemento Massimale)**.**
Data A catena e $x \in A$, se $\forall y \in A, x \leq y \implies x = y$ allora x è *massimale* di A.

Definizione 1.22 (Maggiornate)**.**
Data A catena e $B \subseteq A$, se $\exists x \in A$ t.c. $\forall y \in B \; x \geq y$ allora x è un *maggiornate* di B.

Definizione 1.23 (Estremo superiore)**.**
Data A catena e x un maggiorante per $B \subseteq A$ affermiamo che x è *estremo superiore* di B se $\forall y$ maggiorante di B $y \geq x$.
Se B ammette estremo superiore esso viene indicato con $\sup B$.

Analogamente definiamo *minimo*, *elemento minimale*, *minorante* ed *estremo inferiore*.

Definizione 1.24 (Insiemi Densi)**.**
Dato B insieme ordinato e $A \subseteq B$ affermiamo che A è *denso* in B se $\forall x, y \in B, x < y, \exists z \in A : x < z < y$

1.3 Funzioni

Definizione 1.25 (Funzione)**.**
Una *funzione* f con *dominio* A e *codominio* B (che indichiamo $f : A \to B$) è una legge che associa un unico elemento di B ad ogni elemento di A.
L'elemento associato a $x \in A$ è *l'immagine* di x secondo f e viene denotato $f(x)$.

Definizione 1.26 (Immagine e Controimmagine)**.**
Sia $f(A) \doteqdot \{f(x) \in B | x \in A\} \subseteq B$ *l'immagine* di f.
Sia $f^{-1}(y) \doteqdot \{x \in A | f(x) = y\}$ la *controimmagine* di y

Osservazione 1.27.
La relazione $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ è di Equivalenza e quindi $\{f^{-1}(x) | x \in \mathrm{Imm} f\}$ è una Partizione del dominio.

Definizione 1.28 (Grafico di una Funzione)**.**
Sia $\Gamma_f \doteqdot \{(x, f(x)) \in A \times B \mid x \in A\} \subseteq A \times B$ il *grafico* di f

Osservazione 1.29.
Dato $\Gamma \in A \times B$, se $\forall x \in A\ \exists! y \in B : (x, y) \in \Gamma$ allora $\exists f : A \to B$ t.c. $\Gamma = \Gamma_f$

Definizione 1.30 (Restrizione)**.**
Dati $f : A \to B$ e $C \subseteq A$, sia $f|_C : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ la *restrizione* di f a C.

Definizione 1.31 (Composizione)**.**
Date $f : A \to B, g : B \to C$ sia $g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$ la *composizione* di f con g.

Definizione 1.32 (Funzione caratteristica)**.**
Sia

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

la *funzione caratteristica* di A

1.3.1 Proprietà delle Funzioni

Definizione 1.33 (Iniettività, Surgettività e Bigezione)**.**
Data $f : A \to B$ definiamo le seguenti proprietà:

$f(x) = f(y) \implies x = y$	Iniettiva
$f(A) = B$	Surgettiva
f iniettiva e surgettiva	Bigettiva

Osservazione 1.34.
$f : A \to f(A) \subseteq B$ è sempre Surgettiva

Definizione 1.35 (Invertibile)**.**
Una funzione f è *invertibile* se $g : y \mapsto f^{-1}(y)$ è una funzione, in tal caso chiamiamo g *l'inversa* di f e la indichiamo con f^{-1}.

Osservazione 1.36.
f è bigettiva se e solo se è invertibile

Osservazione 1.37.
f invertibile$\iff f^{-1} \circ f = id_A \wedge f \circ f^{-1} = id_B$.

Definizione 1.38 (Monotonia)**.**
Data $f : A \to B$ con A e B insiemi ordinati abbiamo che f è *crescente* se $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ e *decrescente* se $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$. In entrambi i casi f è detta *monotona.*

1.4 n-uple e Successioni

Definizione 1.39 ($n-$upla)**.**
Una $n-$*upla* su A è un elemento di A^n

Definizione 1.40 (Successione)**.**
Una *successione* su A (che denotiamo (a_n)) è una funzione $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & a_n \end{array}$
Definiamo $A^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni su A.

Osservazione 1.41.
Una successione su A può essere definita per ricorrenza fornendo il valore a in 0 e una funzione $f: \begin{array}{ccc} Y \times \mathbb{N} & \longrightarrow & Y \\ (a_n, n) & \longmapsto & a_{n+1} \end{array}$
dove $Y = A^k$ se i termini derivano dai k precedenti. In tale caso diamo la definizione nella seguente forma

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = f(a_n, n) \end{cases}$$

Definizione 1.42 (Progressione aritmetica)**.**
Una $n-$upla è detta in *progressione aritmetica* se $\exists r : \forall k \in \mathbb{N}_n \; a_k = a_{k-1} + r$.[1]
Definiamo una successione in progressione aritmetica (o *successione aritmetica*) se la stessa condizione vale $\forall k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1.43.
Se (a_n) è aritmetica allora $\forall k \; a_k = a_0 + kr$.

Lemma 1.44 (Formula di Gauss per la somma)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione. Sia il valore della somma $S = \sum_{k=1}^{n} k$, allora

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k$$

Sommiamo allora i termini della seconda sommatoria al contrario

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=n}^{1} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} [n - k + 1] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1] = n(n+1)$$

Quindi $2S = n(n+1)$, cioè la somma richiesta vale $\frac{n(n+1)}{2}$. □

Proposizione 1.45 (Somma di termini in progressione aritmetica)**.**
Sia (a_n) in progressione aritmetica, allora

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)a_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostrazione.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} [a_0 + kr] = (n+1)a_0 + r\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) = (n+1)a_0 + r\left(\sum_{k=1}^{n} k\right).$$

La tesi segue dal Lemma. □

[1] dove $\mathbb{N}_k = \{0, 1, \cdots, k\}$. I numeri naturali saranno definiti nel capitolo 3.

Definizione 1.46 (Progressione geometrica).
Una $n-$upla è detta in *progressione geometrica* se $\exists r : \forall k \in \mathbb{N}_n \; a_k = ra_{k-1}$.
Definiamo una successione in progressione geometrica (o *successione geometrica*) se la stessa condizione vale $\forall k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1.47.
Se (a_n) è geometrica allora $\forall k \; a_k = a_0 r^k$.

Proposizione 1.48 (Somma di termini in progressione geometrica).
Sia (a_n) in progressione geometrica, allora

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \begin{cases} a_0 \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & se \; r \neq 1 \\ a_0(n+1) & se \; r = 1 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Osserviamo in linea preliminare che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{n} r^k,$$

quindi cerchiamo il valore di $S = \sum\limits_{k=0}^{n} r^k$.

$$rS = \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} r^k = S - 1 + r^{n+1}.$$

Ricaviamo quindi che $S = \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$ per $r \neq 1$, mentre se $r = 1$ abbiamo $S = n + 1$ trivialmente. Concludendo:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \begin{cases} a_0 \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & se \; r \neq 1 \\ a_0(n+1) & se \; r = 1 \end{cases}.$$

□

Proposizione 1.49 (Somme telescopiche).

$$\sum_{k=0}^{n} [a_{k+1} - a_k] = a_{n+1} - a_0$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n:
$(n = 0)$

$$\sum_{k=0}^{0} [a_{k+1} - a_k] = a_{0+1} - a_0.$$

$(n > 0)$

$$\sum_{k=0}^{n} [a_{k+1} - a_k] = a_{n+1} - a_n + (a_{n-1+1} - a_0) = a_{n+1} - a_0.$$

□

1.5 Polinomi

Definizione 1.50 (Polinomio).
Dato un campo $\mathbb{K}$ un *polinomio* a *coefficienti* in $\mathbb{K}$, *indeterminata* t e *grado* $n \in \mathbb{N}$ è una somma formale del tipo

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \quad a_i \in \mathbb{K}.$$

L'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ e indeterminata t è denotato con $\mathbb{K}[t]$.
Dato un polinomio $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ denotiamo $\deg p = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$ il *grado* di p.
Poniamo $\mathbb{K}_m[t] = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid \deg p \leq m\}$.

Possiamo definire una somma e un prodotto sui polinomi come segue:

$$p = \sum a_i t^i, q = \sum b_i t^i$$

$$p + q = \sum (a_i + b_i) t^i$$

$$pq = \sum_i \sum_j a_i b_j t^{i+j}.$$

Capitolo 2

Insiemi Infiniti e Cardinalità

2.1 Assioma della Scelta

Assioma 2.1 (Assioma della Scelta)**.**
Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una partizione, allora

$$\exists B \subseteq A \ t.c. \ B \cap A_i = \{x_i\} \ \forall i \in I$$

Corollario 2.2 (Assioma della Scelta II forma)**.**
Dato che ogni funzione surgettiva definisce una partizione dell'immagine

$$\forall f : A \to B \text{ surgettiva } \exists g : B \to A \text{ iniettiva } : f \circ g = id_B$$

Teorema 2.3 (Lemma di Zorn)**.**
$A \neq \emptyset$, se $\forall B \subseteq A : B$ catena

$$\exists x_b \text{ maggiorante in } B \implies \exists \overline{x} \in A \text{ massimale di } A$$

Teorema 2.4 (Bernstein)**.**

$$\exists f : A \to B \text{ iniettiva}, \exists g : B \to A \text{ iniettiva} \iff \exists h : A \to B \text{ bigettiva}$$

2.2 Cardinalità di un insieme

Definizione 2.5 (Cardinalità finita)**.**
Dato un insieme finito A, la *cardinalità* di A, denotata $|A|$, è il numero di elementi contenuti in A.

Osservazione 2.6.
$A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$

Osservazione 2.7.

$$|A| = |B| \iff \exists f : A \to B \text{ bigettiva}$$
$$|A| \leq |B| \iff \exists f : A \to B \text{ iniettiva } \iff \exists f : B \to A \text{ surgettiva}$$

Questa proprietà motiva la seguente definizione

Definizione 2.8 (Confronto tra cardinalità)**.**
Dati A e B insiemi (anche infiniti) asseriamo che hanno la *stessa cardinalità* ($|A| = |B|$) se $\exists f : A \to B$ bigettiva.
Similmente affermiamo che la cardinalità di A è minore o uguale a quella di B ($|A| \leq |B|$) se $\exists f : A \to B$ iniettiva o se $\exists f : B \to A$ surgettiva.

Osservazione 2.9.
Per il teorema di Bernstein (2.4) $|A| \leq |B| \wedge |A| \geq |B| \iff |A| = |B|$

2.3 Coefficienti Binomiali

Proposizione 2.10.
Se A è in insieme finito, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Dimostrazione. Esiste una bigezione naturale tra $\mathcal{P}(A)$ e $\{f : A \to \{0,1\}\}$ data considerando le funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi di A. Notiamo infine che $|\{f : A \to \{0,1\}\}| = 2^{|A|}$ perché ogni suo elemento è identificato dalla scelta binaria 0 o 1 per ogni elemento di A. □

Osservazione 2.11.
Per insiemi finiti A, B osserviamo che vale

$$|\{f : A \to B\}| = |B|^{|A|}.$$

Considerando anche la notazione introdotta per le successioni, poniamo, anche per insiemi infiniti, la seguente notazione

$$\{f : A \to B\} = B^A.$$

Definizione 2.12 (Combinazioni Semplici)**.**
Sia $\mathcal{P}_k(A) = \{B \subseteq A||B| = k\}$ l'insieme delle *combinazioni semplici* di *ordine* k su A

Proposizione 2.13 (Principio di Inclusione-Esclusione)**.**

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|$$

Dimostrazione. Siano

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \text{e} \quad \phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \prod_{j=1}^{n}(1-\chi_{A_j}(x)) \end{array},$$

dove χ_A è la funzione caratteristica di A. Osserviamo che $\forall x \in X$, $\phi(x) = 0$ perché se $x \in X$ allora $\exists A_j : x \in A_j$ ma allora $1 - \chi_{A_j}(x)$ si annulla. Quindi $\displaystyle\sum_{x\in X} \phi(x) = 0$.

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^{n}(1-\chi_{A_j}(x)) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \prod_{j\in J} \chi_{A_j}(x).$$

Osserviamo che $\prod_{j\in J} \chi_{A_j}(x)$ coincide con la funzione caratteristica di $\bigcap_{j\in J} A_j$. Per semplicità notazionale definiamo $\xi(x) = \chi_{\bigcap_{j\in J} A_j}(x)$, da cui

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \xi(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \xi(x).$$

Allora

$$0 = \sum_{x\in X} \phi(x) = \sum_{x\in X} \left[1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \xi(x)\right] =$$

$$= |X| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \sum_{x\in X} \xi(x) = |x| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|$$

Concludendo

$$|X| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{J\in\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)} \left|\bigcap_{j\in J} A_j\right|,$$

da cui la tesi. □

Definizione 2.14 (Coefficiente Binomiale)**.**
Sia A un insieme tale che $|A| = n$, sia $\binom{n}{k} = |\{B \subseteq A||B| = k\}|$ il *coefficiente binomiale* n su k.

Proposizione 2.15.
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Dimostrazione. [1]
$n = 0)$ $1 = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$.
$n > 0)$ Verifichiamo che vale l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ per entrambe le definizioni:
$(\star)$ Verifichiamo per cardinalità: per un qualsiasi elemento $x \in A$ abbiamo

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} =&|\mathcal{P}_k(A)| = |\{B \in \mathcal{P}_k(A) \mid x \in A\} \sqcup \{B \in \mathcal{P}_k(A) \mid x \notin A\}| = \\ =&|\{B \in \mathcal{P}_k(A) \mid x \in A\}| + |\{B \in \mathcal{P}_k(A) \mid x \notin A\}| = \\ =&|\{B \cup \{x\} \in \mathcal{P}_{k-1}(A \backslash \{x\})\}| + |\{B \in \mathcal{P}_k(A \backslash \{x\}| \\ =&\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.\end{aligned}$$

$(\star)$
$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(k+n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Per ipotesi induttiva sappiamo che le cardinalità coincidono alla riga $n-1$:
Per $k = 0, n$ abbiamo
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1,$$
mentre per $0 < k < n$ abbiamo che
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Proposizione 2.16 (Binomio di Newton)**.**
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n:
$n = 0)$
$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0.$$

$n > 0)$ Dato che per $k < 0$ o $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$, possiamo scrivere senza ambiguità:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} =&(a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \\ =&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \\ =&\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \\ =&\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

□

La proposizione precedente motiva il nome *coefficiente binomiale*.

Proposizione 2.17 (Disuguaglianza di Bernulli)**.**
Per $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Dimostrazione.
$n = 0)$ $(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0a = 1$.
$n > 0)$ Dato che $na^2 > 0$ per $n > 0$:
$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a.$$

□

[1] Per questa e la prossima dimostrazione useremo il principio di induzione 3.3, che dimostreremo nel prossimo capitolo.

Osservazione 2.18.
La tesi in realtà vale per $n \in \mathbb{R}\backslash(0,1)$.

2.4 Teorema di Cantor

Definizione 2.19 (Insiemi Numerabili)**.**
Un insieme A è *numerabile* se $|A| = |\mathbb{N}| \doteq \aleph_0$

Proposizione 2.20.
A insieme infinito $\implies \exists B \subseteq A$ numerabile.

Dimostrazione. Sia $f : \mathcal{P}(A) \to A$ t.c. $\forall B \subseteq A \ f(B) \in B$. Sia quindi $a_0 \in A$ e $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} = f(A\backslash\{a_0, \cdots, a_n\})$. Per come abbiamo definito f, $a_{n+1} \in A\backslash\{a_0, \cdots, a_n\} \implies a_{n+1} \notin \{a_0, \cdots, a_n\}$, dunque $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ è numerabile per costruzione. □

Teorema 2.21 (Cantor)**.**
$|A| < |\mathcal{P}(A)| \iff |A| \neq |\mathcal{P}(A)|$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\exists f : A \to \mathcal{P}(A)$ bigettiva. Sia $B = \{x \mid x \notin f(x)\}$ e $\bar{x} = f^{-1}(B) \implies f(\bar{x}) = B$. Osserviamo che $\bar{x} \in B \implies \bar{x} \notin B$ per definizione di f e analogamente $\bar{x} \notin B \implies \bar{x} \in B$. Deduciamo che $\nexists f^{-1}(B)$, dunque f non è surgettiva ↯ □

Per curiosità mostriamo una rappresentazione della dimostrazione in forma di tabella per il caso $A = \mathbb{N}$:

$\ni$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(0)$	$\underline{0}$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
$f(1)$	0	$\underline{1}$	0	0	0	1	1	0	1	0	1
$f(2)$	1	0	$\underline{1}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$f(3)$	0	1	1	$\underline{0}$	0	0	0	1	1	0	1
$f(4)$	0	1	0	1	$\underline{1}$	1	0	0	0	0	0
$f(5)$	1	0	1	0	0	$\underline{0}$	0	1	1	0	1
$f(6)$	0	1	0	0	1	1	$\underline{1}$	1	0	0	0
$f(7)$	0	0	1	1	0	0	0	$\underline{1}$	1	0	1
$f(8)$	0	1	1	0	1	0	0	0	$\underline{0}$	0	0

Consideriamo allora $A = \{0, 3, 5, 8 \cdots\}$. A non può essere $f(0)$ perché contiene 0, non può essere $f(1)$ perché non contiene 1 etc.

Capitolo 3

Insiemi Numerici

3.1 I Numeri Naturali

Definizione 3.1 (ℕ alla Peano)**.**
ℕ è un insieme tale che:

$0 \in \mathbb{N}$	Elemento iniziale
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists (n+1) \in \mathbb{N}$	Successivo
$\forall S \subset \mathbb{N}, S \neq \emptyset\ \exists s_0 \in S : \forall s \in S\ s_0 \leq s$	Principio del minimo

Osservazione 3.2.
Il principio del minimo è equivalente ad affermare che ℕ è ben ordinato.

Proposizione 3.3 (Principio di Induzione)**.**
Sia $P(n)$ una proposizione definita $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{Z}$. Se valgono le seguenti

$P(n_0)$ è vera	Passo base
$\forall n \geq n_0\ P(n) \implies P(n+1)$	Passo induttivo

Allora $P(n)$ vale $\forall n \geq n_0$.

Dimostrazione. Sia $S = \{n \geq n_0 \mid P(n) \text{ è falsa}\}$, la tesi equivale a $S = \emptyset$. Per assurdo ipotizziamo $S \neq \emptyset$, allora per il Principio del Minimo $\exists s_0 \in S : s_0 \leq s \forall s \in S$. Essendo $P(n_0)$ vera, $n_0 \notin S$ dunque $s_0 \neq n_0 \implies s_0 > n_0 \implies s_0 - 1 \geq n_0$. Siccome $s_0 - 1 < s_0$, $(s_0 - 1 \notin S) \implies P(s_0 - 1)$ è vera. Per il passo induttivo $P(s_0 - 1) \implies P(s_0)$ sono vere ↯ □

3.2 I Numeri Interi

Definizione 3.4 (Numeri Interi)**.**
$\mathbb{Z} \doteq {}^{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}\!/\!_{\sim}$ con $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$. Le operazioni su ℤ sono:

$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$	Somma
$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$	Prodotto

Sia $a \geq b \in \mathbb{N}$ e sia $n = a - b$. Identifichiamo allora $n = [(a, b)]$ e $-n = [(b, a)]$ come simboli per le classi di equivalenza.

Osservazione 3.5.
ℤ è numerabile. Infatti $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (-1)^n \end{array}$ è bigettiva.

3.3 I Numeri Razionali

Definizione 3.6 (Numeri Interi)**.**
$\mathbb{Q} \doteq {}^{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})}\!/\!_{\sim}$ con $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = cb$. Le operazioni su ℚ sono:

$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$	Somma
$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$	Prodotto

Per comodità scriveremo $\frac{a}{b}$ al posto di $[(a, b)]$.

Proposizione 3.7.
$\mathbb{Q}$ è numerabile

Dimostrazione. Osserviamo che $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \longmapsto & \frac{p}{q} \end{array}$ è surgettiva, quindi $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile definendo $g : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}^2$ surgettiva ricorsivamente

$$g(n) = \begin{cases} (0,0) & se\ n = 0 \\ (a+1, b-1) & se\ g(n-1) = (a,b)\ e\ b \neq 0 \\ (0, a+1) & se\ g(n-1) = (a,b)\ e\ b = 0 \end{cases}$$

Quindi $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ ma siccome $\mathbb{Q}$ è infinito, deve essere che $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ □

Illustriamo la corrispondenza con la seguente tabella:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	2	5	9	14	20	27	35	44
1	1	4	8	13	19	26	34	43	
2	3	7	12	18	25	33	42		
3	6	11	17	24	32	41			
4	10	16	23	31	40				
5	15	22	30	39					
6	21	29	38						
7	28	37							
8	36								

3.4 I Numeri Reali

3.4.1 Sezioni di Dedekind

Assioma 3.8 (di Dedekind)**.**
Dato un campo R, esso rispetta *l'assioma di Dedekind* se $\forall A, B \subset R$ non vuoti tali che $\forall a \in A, b \in B$, $a < b$ abbiamo che $\forall a \in A, b \in B\ \exists r \in R$ t.c. $a \leq r \leq b$. r è detto *elemento separatore* di A e B

Osserviamo che l'assioma di Dedekind è equivalente a

$$\forall A \subseteq R, A \neq \emptyset \text{ superiormente limitato}, \exists \sup A \in R.$$

Definizione 3.9 (Numeri reali)**.**
Un campo ordinato per il quale vale l'assioma di Dedekind è detto campo dei *numeri reali.*

Forniamo allora un modello dei numeri reali. Per farlo introduciamo le sezioni di Dedekind.

Definizione 3.10 (Sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}$)**.**
Una *sezione di Dedekind* di $\mathbb{Q}$ è una partizione (A, B) di $\mathbb{Q}$ tale che

$$\forall x \in A, y \in B \quad x < y.$$

Il modello dei reali che proporremo è l'insieme delle sezioni di Dedekind di $\mathbb{Q}$, che indicheremo con $\mathbb{R}$. Prima definiamone alcune proprietà.

Possiamo riconoscere una copia di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, in particolare a $q \in \mathbb{Q}$ associamo la coppia

$$(A_q, B_q) = (\{x \in Q \mid x < q\}, \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq q\}).$$

Dato che vorremmo dimostrare una proprietà di $\mathbb{R}$ che dipende dall'ordinamento abbiamo la seguente proposizione:

Proposizione 3.11.
La relazione su $\mathbb{R}$ data da

$$(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$$

è un ordinamento totale.

Dimostrazione. Il contenimento è riflessivo, transitivo e antisimmetrico. Dato che B è completamente determinato da A (essendone il complementare), abbiamo che la relazione è un ordinamento. Mostriamo quindi che è totale, ovvero in questo caso $A' \not\subseteq A \implies A \subseteq A'$. Sia $p \in B \cap A'$ (osserviamo che $B \cap A' \neq \emptyset$ perché altrimenti $A' \subseteq A$), abbiamo che $\forall q \in A$, $q < p$, ovvero $A \subseteq A_p$. Osserviamo infine che $A_p \subseteq A'$, quindi $A \subseteq A'$. □

Proposizione 3.12.
$\mathbb{R}$ munito dell'ordinamento definito sopra rispetta l'assioma di Dedekind.

Dimostrazione. Per comodità, data $x \in \mathbb{R}$ poniamo $x = (A_x, B_x)$. Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\sup S = \sup \bigcup_{y \in S} A_y = \sup A_x$$

per qualche x sezione su $\mathbb{Q}$. Definiamo allora

$$z_S = \left(\bigcup_{y \in A_x} A_y, \mathbb{R} \setminus \bigcup_{y \in A_x} A_y \right) = (A_z, B_z).$$

Chiaramente z_S è un maggiorante di S. Sia allora $w < z_S$. Abbiamo quindi che $A_w = A_z \setminus C$ con $C \subseteq \bigcup_{y \in A_x} A_y$ non vuoto, ovvero $\exists y \in A_x$ t.c. $y \cap C \neq \emptyset$. Abbiamo quindi $A_w \not\supseteq A_y \iff w < y$ per $y \in A_x$, cioè w non è un maggiorante di S. Abbiamo quindi che $z_S = \sup S$. $\square$

Abbiamo che su $\mathbb{R}$ vale l'assioma di Dedekind. Definiamo allora su $\mathbb{R}$ delle operazioni che lo rendono un campo. La somma è abbastanza semplice:

$$(A, B) + (A', B') = (\{a + a' \mid a \in A, a' \in A'\}, \{b + b' \mid b \in B, b' \in B'\}).$$

Per il prodotto definiamo prima l'opposto di una sezione e cosè una sezione positiva. $-(A, B)$ è la sezione tale che

$$(A, B) + (-(A, B)) = (\{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}, \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}) = (A_0, B_0).$$

Una sezione non negativa è banalmente una sezione x tale che $x \geq (A_0, B_0)$, ovvero $A_x \subseteq A_0$. Possiamo allora definire il prodotto tra sezioni non negative

$$(A, B) \cdot (A', B') = (\underbrace{\{qq' \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0, q' \geq 0, q \in A, q' \in A'\} \cup A_0}_{C}, \mathbb{Q} \setminus C).$$

È possibile mostrare che le operazioni definite rendono $\mathbb{R}$ un campo e che rispettano l'ordine che abbiamo definito, dunque $\mathbb{R}$ è effettivamente un modello per i numeri reali.

3.4.2 Continuità dei reali

Definizione 3.13 (Campo ordinato completo)**.**
Un campo ordinato è *completo* se rispetta l'assioma di Dedekind.

Proposizione 3.14.
Dato $\mathbb{K}$ campo ordinato completo esso è isomorfo all'insieme delle sezioni di Dedekind su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Per comodità definiamo $\overline{\mathbb{K}}$ l'insieme delle sezioni di Dedekind su $\mathbb{K}$. Ponendo $A_x = \{y \in \mathbb{K} \mid y < x\}$ e $B_x = \mathbb{K} \setminus A_x$, consideriamo la mappa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{K}} \\ x & \longmapsto & (A_x, B_x) \end{array}.$$

Osserviamo che per l'assioma di Dedekind $\sup A_x$ esiste e coincide con x, allora questo ci permette di definire ψ^{-1}. Per come sono definite le operazioni su $\overline{\mathbb{K}}$ abbiamo che ψ è un omomorfismo di campi. $\square$

Definizione 3.15 (Campo archimedeo)**.**
Un campo $\mathbb{K}$ ordinato è archimedeo se $\forall a, b \in \mathbb{K}$ tali che $0 < a < b$, $\exists n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ per cui $b < na$, dove con $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ intendiamo la copia di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$.

Proposizione 3.16.
Se $\mathbb{K}$ è un campo archimedeo allora $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ è denso in $\mathbb{K}$

Dimostrazione. Siano $y - x > 0$ e $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ t.c. $n(y - x) > 1$, ovvero $\frac{1}{n} < y - x$.
Se $x = 0$ allora $\frac{1}{n}$ rispetta la tesi.
Se $x > 0$, sia $k = \max\{j \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \mid \frac{j}{n} \leq x\}$, da cui

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} \leq \frac{x+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y,$$

quindi $\frac{k+1}{n}$ rispetta la tesi.
Se $x < 0$ il ragionamento è analogo ma scegliamo

$$k = \min\{j \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \mid \frac{-j}{n} \leq x\}.$$

$\square$

Corollario 3.17.
$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Infatti date $0 < \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ abbiamo che $\frac{a}{b} < n\frac{c}{d}$ per $\frac{ad}{cb} < n$.

Proposizione 3.18.
Ogni campo $\mathbb{K}$ ordinato completo è archimedeo.

Dimostrazione. Per assurdo ipotizziamo $\exists a, b \in \mathbb{K}$ t.c. $0 < a < b$ e $b \geq na$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$. Allora l'insieme $S = \{na \mid n \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}\}$ è non vuoto e superiormente limitato da b, quindi esiste $\sigma = \sup S$. Per definizione di estremo superiore $\sigma - a$ non è un maggiorante di S, quindi $\exists k \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ t.c. $\sigma - a < ka$, cioè $\sigma < (k+1)a \in S$ $\lightning$. $\square$

Corollario 3.19.
$\mathbb{R}$ è archimedeo

Teorema 3.20.
Dato $\mathbb{K}$ campo ordinato archimedeo, l'insieme delle sezioni di Dedekind su $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ is sottocampo di $\mathbb{K}$ isomorfo a $\mathbb{Q}$. Per comodità definiamo

$$\overline{\mathbb{F}} = \{\text{sezioni di Dedekind su } \mathbb{F}\}.$$

Abbiamo quindi $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Mostriamo che la mappa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}} \\ (A.B) & \longmapsto & (A \cap \mathbb{Q}_K, B \cap \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}) \end{array}$$

è un isomorfismo di campi tra $\overline{\mathbb{K}}$ e $\overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}}$.

Osserviamo che $(A \cap \mathbb{Q}_K, B \cap \mathbb{Q}_{\mathbb{K}})$ è una sezione di Dedekind su $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$, quindi ψ è ben definita. Essendo $\mathbb{K}$ archimedeo $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ è denso in $\mathbb{K}$, quindi date $(A, B), (A', B') \in \overline{\mathbb{K}}$ tali che $(A, B) < (A', B')$ abbiamo che $\exists q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ t.c. $q \in A' \backslash A$, quindi $\psi(A, B) < \psi(A', B')$. Abbiamo quindi ψ strettamente crescente, e quindi iniettiva. Data $(A, B) \in \overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}}$ osserviamo che

$$\psi^{-1}(A, B) \ni (\{x \in \mathbb{K} \mid \exists y \in A : x < y\}, \mathbb{K} \backslash \{x \in \mathbb{K} \mid \exists y \in A : x < y\})$$

per la densità, quindi ψ è anche surgettiva, ovvero ψ è bigettiva. Analogamente possiamo verificare che ψ è un omomorfismo di campi.

Tramite l'isomorfismo canonico tra $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ e $\mathbb{Q}$ abbiamo

$$\overline{\mathbb{K}} \cong \overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}} \cong \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

$\square$

Corollario 3.21.
Ogni campo ordinato $\mathbb{K}$ completo è isomorfo a $\mathbb{R}$. Essendo completo $\mathbb{K} \cong \overline{\mathbb{K}}$ ed essendo archimedeo $\overline{\mathbb{K}} \cong \mathbb{R}$.

3.4.3 Cardinalità dei reali

Proposizione 3.22.
$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$

Dimostrazione. $\mathbb{R} = \{(A, B)$ sezioni di Dedekind su $\mathbb{Q}\}$ e $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. $|\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, quindi $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Osserviamo che $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{f : \mathbb{N} \to \{0, 2\}\}|$. Definiamo allora

$$g : \begin{array}{ccc} \{0, 2\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i \geq 1} 3^{-i} f(i) \end{array}$$

che ad ogni funzione associa tutti e soli i numeri reali la cui rappresentazione in base 3 ha cifre dopo la virgola solo 0 o 2. Da $f \neq f' \implies g(f) \neq g(f')$ dato che le immagini differiscono in almeno una cifra in base 3, quindi g è iniettiva. Per il Teorema di Bernstein 2.4 e il Teorema di Cantor 2.21 questo termina la dimostrazione. $\square$

Nella dimostrazione abbiamo impiegato un particolare insieme, il quale risulta interessante in sé:

Definizione 3.23 (Insieme di Cantor)**.**
Sia *l'insime di Cantor* l'immagine della seguente funzione

$$\begin{array}{ccc} \{0,2\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sum_{i\geq 1} 3^{-i} f(i) \end{array} .$$

3.4.4 Potenze con Esponente Reale

Definizione 3.24 (Radice $n-$esima)**.**
Se per $x, y \in \mathbb{R}, x^n = y$ allora x è una *radice* $n-$*esima* di y.

Proposizione 3.25 (Esistenza e unicità della radice)**.**
$\forall y \geq 0, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ esiste un'unica radice $n-$esima x di y.

Dimostrazione.
Esistenza) Sia $x = \sup\{z \mid z^n \leq y\}$, verifichiamo che $x^n = y$:
osserviamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \ (x-\varepsilon)^n \leq z^n \leq y < (x+\varepsilon)^n$$

e che

$$(x-\varepsilon)^n \leq x^n \leq (x+\varepsilon)^n,$$

quindi $|x^n - y| \leq (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n = \varepsilon C$ per qualche $C \in \mathbb{R}_+$. Siccome ε è un valore arbitrario ma $|x^n - y|$ è sempre lo stesso abbiamo che l'unico valore possibile è

$$|x^n - y| = 0 \implies x^n = y.$$

Unicità) Per assurdo sia $z > x > 0$ un'altra radice $n-$esima di y. Allora $z^n = x^n = y$, ma $z > x > 0 \implies z^n > x^n = y$ ↯.
Per $x > z$ seguiamo un ragionamento analogo. □

Definizione 3.26 (Potenze a valori in $\mathbb{R}$)**.**
Assegniamo un valore a a^b $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. Prima consideriamo il caso $b \in \mathbb{Q}$: se $b \in \mathbb{Q}, b = \frac{j}{n}$ con $(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\}$, da cui

$$a^b = \begin{cases} (a^{\frac{1}{n}})^j & se\ j > 0 \\ 1 & se\ j = 0 \\ \frac{1}{(a^{\frac{1}{n}})^{-j}} & se\ j < 0 \end{cases} .$$

Quindi definiamo la potenza reale a seconda del segno di a:
Se $a = 1$, $a^b = 1^b = 1$.
Se $a > 1$, $a^b = \sup\{a^q \mid q < b, q \in \mathbb{Q}\}$.
Se $a < 1$, $a^b = \inf\{a^q \mid q < b, q \in \mathbb{Q}\}$.

Osservazione 3.27.
Proprietà delle potenze

- $a^{b+c} = a^b a^c$
- $(ab)^c = a^c b^c$
- $a^b > 0$
- $a^0 = 1$
- $1^b = 1$
- $a > 1, b < c \implies a^b < a^c$
- $a < 1, b < c \implies a^b > a^c$

Definizione 3.28 (Logaritmo)**.**
Dato che $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è bigettiva sia $\log_a(x)$ la sua inversa, che chiamiamo *logaritmo* in *base a*

Osservazione 3.29.
Proprietà del logaritmo

- $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- $\log_a(b^c) = c\log_a(b)$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(t) > 0 \iff t > 1$
- $b < c \implies \log_a(b) < \log_a(c)$
- $\log_a(b) = \dfrac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

3.5 I Numeri Complessi

Definizione 3.30 (Numeri Complessi)**.**
Sia $\mathbb{C} = {}^{\mathbb{R}[x]}\!\big/_{(x^2+1)}$, o equivalentemente $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ con i una radice di x^2+1 in una chiusura algebrica di $\mathbb{R}$, l'insieme dei *numeri complessi*.

Osservazione 3.31.
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, abbiamo quindi una corrispondenza naturale con $\mathbb{R}^2$.

Possiamo scrivere i numeri complessi in una forma analoga alle coordinate cartesiane

$$z = a + bi = \rho\cos\alpha + \rho i \sin\alpha = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \mathbb{R} \ni \rho \geq 0.$$

Definizione 3.32 (Modulo e argomento)**.**
Con la notazione sopra definiamo $|z| \doteqdot \rho$ il *modulo* di z e $\arg z \doteqdot \alpha$ *l'argomento* di z.
L'argomento non è univoco, infatti è periodico con periodo 2π. Definiamo allora

$$\operatorname{Arg} z = \arg z \ \textit{t.c.}\ \operatorname{Arg} z \in \{0, 2\pi\}$$

l'argomento principale di z.

Osservazione 3.33 (Legge di De Moivre)**.**
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

Definizione 3.34 (Forma Esponenziale)**.**
Date le somiglianze algebriche con le potenze scriviamo $e^{i\alpha} \doteqdot \cos\alpha + i\sin\alpha$, da cui

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha} = |z|e^{i\arg z}.$$

Essendo $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ surgettiva, notiamo che possiamo scrivere $\rho = e^\beta$, quindi $\forall z \in \mathbb{C}$

$$z = e^{\beta + i\alpha} = e^{\log|z| + i\arg z}.$$

La connessione tra l'esponenziale complesso e le funzioni trigonometriche è più profonda e sarà approfondita dallo studio delle serie di Taylor.

Definizione 3.35 (Coniugato)**.**
Dato $z \in \mathbb{C}$ definiamo z *coniugato* come $\overline{z} \doteqdot |z|e^{-i\arg z}$. Equivalentemente se $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$.

Osservazione 3.36.
$z + \overline{z} = 2|z|\cos\arg z = 2\Re(z) \qquad z\overline{z} = |z|e^{i\arg z}|z|e^{-i\arg z} = |z|^2$

Radici $n-$esime in $\mathbb{C}$

Cerchiamo le soluzioni all'equazione $z^n = w$:

$$z^n = |z|^n e^{in\alpha} = w,$$

quindi $|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$ e $n\alpha = \arg w + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Allora $\alpha = \frac{\arg w}{n} + 2\frac{k}{n}\pi$, che fornisce n soluzioni potenzialmente distinte al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Se $|w| \neq 0$ queste sono distinte, mentre se $|w| = 0$ allora $|z| = 0$, da cui $z = 0$.

Definizione 3.37 (Radici dell'unità)**.**
Le *radici $n-$esime dell'unità* sono le soluzioni all'equazione $z^n = 1 = e^{0i}$, sono quindi della forma

$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad k \in \{0, \cdots, n-1\}$$

3.5.1 Teorema Fondamentale dell'Algebra

Teorema 3.38 (Fondamentale dell'Algebra)**.**
$\forall p \in \mathbb{C}[x]\backslash\mathbb{C}^*, \exists \alpha \in \mathbb{C}$ *t.c.* $p(\alpha) = 0$.

Corollario 3.39.
Ogni polinomio a coefficienti complessi si fattorizza completamente nella forma

$$p(x) = a \prod_{i=0}^{\deg p} (x - x_i)$$

con x_i le radici e a il coefficiente direttivo di p. Equivalentemente $\mathbb{C}$ è Algebricamente Chiuso.

Corollario 3.40.
Ogni polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ si fattorizza in polinomi di primo o secondo grado.

Dimostrazione. Dato $\mathbb{C}[x] \ni p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, sia $\overline{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} x^i$. Se $p \in \mathbb{R}[x]$ allora $p = \overline{p}$ dato che il coniugio lascia inalterati i valori reali. Fattorizzando $p \in \mathbb{R}[x]$ immergendolo in $\mathbb{C}[x]$ abbiamo

$$p(x) = a\prod_{i=0}^{n}(z - x_i) \qquad \overline{p(x)} = \overline{a\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = a\prod_{i=0}^{n}(x - \overline{x_i})$$

Per il Teorema di Fattorizzazione Unica $\exists \sigma \in S_n$ tale che $x - x_i = x - \overline{x}_{\sigma(i)}$, cioè il coniugio riordina le radici nella fattorizzazione.

Se $x_i = \overline{x_i}$ allora x_i è una radice reale di p. Se $x_i = \overline{x_j}$ per $i \neq j$ allora $x_j = \overline{x_i}$. Osserviamo che $(x - x_i)(x - \overline{x_i}) = x^2 - 2\Re(x_i)x + |x_i|^2 \in \mathbb{R}[x]$, quindi dividendo p per $(x - x_i)(x - x_j)$ troviamo un polinomio reale di grado minore a p.

Per induzione ricaviamo quindi che ogni polinomio a coefficienti reali è divisibile per un polinomio irriducibile a coefficienti reali di grado 1 o 2. $\square$

Capitolo 4

Nozioni Topologiche

4.1 Spazi Metrici

Definizione 4.1 (Distanza)**.**
Dato un insieme E una *distanza* su E è una funzione $d : E \times E \to [0, +\infty)$ tale che

$d(x, x) = 0$	$\forall x \in E$	
$d(x, y) = d(y, x)$	$\forall x, y \in E$	Simmetrica
$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$	$\forall x, y, z \in E$	Disuguaglianza Triangolare

La coppia (E, d) con d distanza è detta uno *spazio metrico*

Definizione 4.2 (Palla e Intorno)**.**
Dato (E, d) spazio metrico e $r \in \mathbb{R}_+$, definiamo $B_r(x) = \{y \in E | d(x, y) < r\}$ la *palla* di *raggio* r e *centro* x.
Se $A \subseteq E$ t.c. $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A$ allora A è un *intorno* di x.

Osservazione 4.3.
(E, d) spazio metrico, $E' \subseteq E \implies (E', d)$ spazio metrico.

4.2 Aperti e Chiusi

Definizione 4.4 (Topologia)**.**
Una *topologia* $\mathcal{A}$ su E è un insieme di sottoinsiemi di E tale che

$\emptyset, E \in \mathcal{A}$	Aperti Banali
$\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$	Chiusura per Unione
$\{A_1, \cdots, A_n\} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$	Chiusura per Intersezione Finita

Gli elementi di $\mathcal{A}$ sono detti insiemi *aperti* e i loro complementari su E sono detti insiemi *chiusi*.

Osservazione 4.5.
Sia $\mathcal{C} = \{E \backslash A \mid A \in \mathcal{A}\}$ l'insieme dei chiusi. Dalle leggi di De Morgan ricaviamo le seguenti proprietà sui chiusi:

$\emptyset, E \in \mathcal{C}$	Chiusi Banali
$\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C} \implies \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$	Chiusura per Intersezione
$\{A_1, \cdots, A_n\} \subseteq \mathcal{C} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$	Chiusura per Unione Finita

Proposizione 4.6 (Topologia indotta da una metrica)**.**
Sia (E, d) spazio metrico. La seguente definizione rende $\mathcal{A}$ una topologia su E:
Dato $A \subseteq E$, se $\forall x \in A$ $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$, allora $A \in \mathcal{A}$.

Dimostrazione.
($\star$) $\emptyset$ non ha elementi, dunque vale trivialmente. E contiene ogni elemento di E, dunque ogni palla con centro in E.
($\star$) $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \implies \exists j \in J \; t.c. \; x \in A_j \implies \exists r \; t.c. \; B_r(x) \subset A_j \subset \bigcup_{j \in J} A_j$
($\star$) $x \in \bigcap_{j=1}^n A_j \implies x \in A_j \; \forall j \in \mathbb{N}_n \implies \exists r_j > 0 : B_{r_j}(x) \subset A_j$.
Sia $r = \min\{r_j \mid j \in \mathbb{N}_n\}$, $B_r(x) \subset A_j \; \forall j \in \mathbb{N}_n \implies B_r(x) \subset \bigcap_{j=1}^n A_j$ □

Osservazione 4.7.
Metriche diverse possono indurre la stessa topologia, per esempio su $\mathbb{R}^n$ abbiamo le distanze

$$d_1(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \quad \text{e} \quad d_2(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

per le quali è possibile mostrare che, cambiando opportunamente i raggi, le palle di una contengono quelle dell'altra.

Definizione 4.8 (Interno, Esterno e Frontiera)**.**
$x \in E$ è *interno* ad A se $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A$.
$x \in E$ è *esterno* ad A se è interno ad $E\backslash A$.
$x \in E$ è di *frontiera* per A se non è interno o esterno ad A.
Definiamo inoltre:
$\text{int } A = \{x \in E \mid x \text{ interno ad } A\}$ la *parte interna* di A
$\partial A = E\backslash(\text{int } A \sqcup \text{int } E\backslash A) = \{x \in E \mid x \text{ di frontiera per } A\}$ la *frontiera* di A.

Osservazione 4.9.
($\star$) A aperto $\iff A = \text{int } A$.
($\star$) $\text{int } A$ è aperto, infatti $\forall x \in \text{int } A\ \exists B_r(x) \subseteq A$ e quindi $\forall y \in B_r(x)$, $B_{r-d(x,y)}(y) \subseteq B_r(x) \subseteq A \implies y \in \text{int } A$.
($\star$) $\text{int } A$ è il più grande aperto contenuto in A, infatti se $B \subseteq A$ aperto, ogni suo elemento è interno ad A.

4.3 Punti Aderenti e di Accumulazione

Definizione 4.10 (Punto Aderente e Chiusura)**.**
$x \in E$ è *aderente* ad A se $\forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$.
Sia $\overline{A} \doteqdot \{x \in E \mid x \text{ aderente ad } A\}$ la *chiusura* di A.

Osservazione 4.11.
$A \subseteq \overline{A}$

Definizione 4.12 (Denso (topologia))**.**
A è *denso* in E se $\overline{A} = E$.

Proposizione 4.13.
$\overline{A} = \text{int } A \sqcup \partial A$

Dimostrazione.
($\subseteq$) Se $x \in \bar{A}, \exists y \in B_r(x) : y \in A \implies x \notin \text{int } A^c = (\text{int } A \sqcup \partial A)^c$
($\supseteq$) $\text{int } A \subseteq A \subseteq \bar{A}$. Se $x \in \partial A, B_r(x) \not\subseteq A^c \implies B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ □

Osservazione 4.14.
C è chiuso se e solo se $C = \overline{C}$

Dimostrazione.
$\implies$) Se $\exists x \in \overline{C}\backslash C$ avremmo $x \in C^c$ t.c. $\forall r > 0\ B_r(x) \not\subseteq C^c$, ma in tal caso avremmo C^c non aperto $\lightning$.
$\impliedby$) $\forall x \notin C = \overline{C}$ abbiamo $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \cap C = \emptyset$, allora C^c è aperto, e quindi C è chiuso. □

Definizione 4.15 (Punti di Accumulazione)**.**
$x \in E$ è *punto di accumulazione* per A se $\forall r > 0\ B_r(x)\backslash\{x\} \cap A \neq \emptyset$
Sia $\mathcal{D}(A) = \{x \in E \mid x \text{ punto di accumulazione per } A\} \subseteq \overline{A}$ l'insieme Derivato di A.
Se $x \in E\backslash\mathcal{D}(E)$ allora x è *isolato*.

Definizione 4.16 (Insieme Discreto)**.**
A è *discreto* se $A \neq \emptyset$ e $\mathcal{D}(A) \cap A = \emptyset$.

Osservazione 4.17.
Se x è di accumulazione per A allora $\forall r > 0$ la palla $B_r(x)$ contiene infiniti elementi di A diversi da x.

Dimostrazione. Sia $r = r_0$: $B_{r_0}(x)\backslash\{x\} \cap A \neq \emptyset \implies \exists a_1 \in B_{r_0}(x) \cap A\backslash\{x\}$. Sia allora $r_n = d(x, a_n)$: $\forall i \in \mathbb{N}_n\ a_i \notin B_{r_n}(x)\backslash\{x\}$, ma $\exists a_{n+1} \in B_{r_n}(x) \cap A\backslash\{x\}$. Quindi $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è infinito e contenuto in $B_r(x)\backslash\{x\}$. □

4.4 Teorema di Bolzano-Weiertrass

Proposizione 4.18.
$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, \sigma = \sup A$. Se $\sigma < +\infty$ e $\sigma \notin A \implies \sigma \in \mathcal{D}(A)$

Dimostrazione. Applicando la definizione di estremo superiore:

$$\sigma = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A \ \sigma \geq a \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_0 \in A : \sigma - \varepsilon < a_0 \end{cases}$$

Fissando $\varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ t.c. $\sigma - \varepsilon < a \leq \sigma$. Dato che $\sigma \notin A$ abbiamo che $\sigma - \varepsilon < a < \sigma$. Allora $\forall \varepsilon > 0, A \cap B_\varepsilon(\sigma) \backslash \{\sigma\} \neq \emptyset$. □

Definizione 4.19 (Insieme Limitato)**.**
E è *limitato* se $\exists x \in E, r \in \mathbb{R}$ t.c. $E \subseteq B_r(x)$

Osservazione 4.20.
In $\mathbb{R}^n$ la condizione può essere espressa in modo equivalente in termini di $n-$cubi, dato che l'$n-$cubo di centro x e spigolo $2r$ contiene $B_r(x)$ ed è a sua volta contenuto da $B_R(x)$ $\forall R > \sqrt{n}r$.

Teorema 4.21 (Bolzano-Weierstrass)**.**
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato di cardinalità infinita. Allora $\mathcal{D}(E) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Dato che E è limitato $\exists Q_0 \supseteq E$ un $n-$cubo di spigolo $L_0 > 0$. Dividiamo Q_0 in $\{Q_0^{(1)}, \cdots Q_0^{(2^n)}\}$, 2^n $n-$cubi con spigolo di lunghezza $L_0/2$.

Affermiamo che $\exists i \in \mathbb{N}_{2^n}$ *t.c.* $|Q_0^{(i)} \cap E| = +\infty$. Infatti se $\forall i \in \mathbb{N}_{2^n}$ $|Q_0^{(i)} \cap E| < +\infty$ allora $|E| = \sum_{i=1}^{2^n} |E \cap Q_0^{(i)}| < +\infty$ ↯

Sia allora $Q_{j+1} \in \{Q_j^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}_{2^n}}$ *t.c.* $|Q_{j+1} \cap E| = +\infty$. Osserviamo che gli spigoli di Q_j hanno lunghezza $L_0/2^j$.

Sia $\bar{x} \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} [Q_j]$. Dato che $\forall r > 0$ $\exists j \in \mathbb{N}$ *t.c.* $r > \frac{1}{2^j}$ abbiamo che $B_r(\bar{x}) \supseteq Q_j$ e $|Q_j \cap E| = +\infty$, quindi $\forall r > 0$ $\exists a \in E \backslash \{\bar{x}\}$ *t.c.* $a \in B_r(\bar{x})$. □

Corollario 4.22.
Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato chiuso di cardinalità infinita allora $E \cap \mathcal{D}(E) \neq \emptyset$. Infatti $\mathcal{D}(E) \subset \overline{E} = E$.

Capitolo 5

Limiti

5.1 Definizione per Funzioni e Successioni

Definizione 5.1 (Limite di Funzione)**.**
Siano E, F spazi metrici e $f : E\backslash\{x_0\} \to F$ con x_0 punto di accumulazione in E. f ha *limite* $\ell \in F$ per x che *tende* a x_0 se $\forall V$ intorno di ℓ, $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(U\backslash\{x_0\}) \subseteq V$. Denotiamo il limite con

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \text{ o semplicemente } f(x) \to \ell \text{ se è chiaro a quale valore tende } x.$$

Osservazione 5.2.
Il limite è indipendente da $f(x_0)$

Osservazione 5.3.
Se il limite esiste è unico

Dimostrazione. Siano ℓ e ℓ' due limiti distinti, allora $\exists V, V'$ t.c. $V \cap V' = \emptyset$ con V intorno di ℓ e V' di ℓ'. Per definizione di limite $\exists U, U'$ intorni di x_0 tali che $f(U) \subseteq V$ e $f(U') \subseteq V'$. Per definizione di intorno $\exists r, r'$ t.c. $U \supseteq B_r(x_0), U' \supseteq B_{r'}(x_0)$. Senza perdita di generalità sia $r \leq r'$, allora $B_r(x_0) \subseteq U \cap U'$, quindi $f(B_r(x_0)) \subset V \cap V' = \emptyset$↯ □

Definizione 5.4 ($\mathbb{R}$ Esteso)**.**
Sia $\mathbb{R}$ *esteso* $\overline{\mathbb{R}} \doteqdot \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Definizione 5.5 (Intorno di Infinito)**.**
L'insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di $+\infty$ se $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y > x,\ y \in U$. Analogo per $-\infty$.

Osservazione 5.6.
Possiamo definire limiti per $x \to \pm\infty$ e possiamo avere $\pm\infty$ come risultati di particolari limiti.

5.1.1 Limiti di Successioni

Definizione 5.7 (Limite di una Successione)**.**
Data $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione in E, essa ha limite $\ell \in E$ se, definita $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$, abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff x_i \to \ell$$

Definizione 5.8 (Convergenza)**.**
Una successione (x_n) con $x_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è *convergente* se $\ell \in \mathbb{R}$ e *divergente* se $\ell = \pm\infty$, altrimenti è detta *non convergente.*

Definizione 5.9 (Chiusura per Successione)**.**
Se $\forall (a_n) \in C^{\mathbb{N}}, a_n \to x \in C$ allora C è chiuso per successioni.

Osservazione 5.10.
Un insieme chiuso è chiuso per successione

Dimostrazione. Sia C chiuso, $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ e $x_n \to x$. Per definizione

$$\forall U \text{ intorno di } x,\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.c.\ \forall n > N, x_n \in U,$$

quindi $U \cap C \neq \emptyset \implies x \in \overline{C} = C$. □

Proposizione 5.11.
Uno spazio metrico $C \subseteq E$ chiuso per successioni è chiuso.

Dimostrazione. Dato $x \in E$ abbiamo due casi: se $x \in \text{int } C$ non contraddice la tesi, se $x \in \partial C$ sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap C \neq \emptyset$, sia allora $a_{\lfloor 1/\varepsilon \rfloor} \in B_{\lfloor \varepsilon \rfloor}(x) \cap C$. Questo definisce una successione $a_n \in C^{\mathbb{N}}$ con limite x. Essendo C chiuso per successioni, $x \in C$, quindi $\overline{C} \subseteq C \implies C$ chiuso. □

Definizione 5.12 (Convergenza di funzioni)**.**
Una successione di funzioni $(f_n) \in \{g : A \to B\}^{\mathbb{N}}$ *converge* alla funzione f se $\forall x \in A \lim_n f_n(x) = f(x)$.

Definizione 5.13 (Convergenza Uniforme)**.**
Data una successione di funzioni reali $(f_n) \in \{g : E \to \mathbb{R}\}^{\mathbb{N}}$ se $\forall \varepsilon > 0$ vale definitivamente

$$\forall x \in E, f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

allora (f_n) *converge a f uniformemente.*

5.2 Proprietà algebriche del limite

Teorema 5.14 (Permamenza del Segno)**.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \gtrless 0 \implies \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } \forall y \in U \ f(y) \gtrless 0$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\forall U$ intorno di x_0, $\exists y \in U$ t.c. $f(y)\ell \leq 0$ e consideriamo $|\ell| > r > 0$. Osserviamo che $\forall z$ t.c. $z\ell \leq 0$ abbiamo $|\ell - z| \geq |\ell|$, e quindi $z \notin B_r(\ell)$. Allora considerando $z = f(y)$ abbiamo trovato che $\exists V = B_r(\ell)$ intorno di ℓ tale che $\forall U$ intorno di x_0, $f(U \backslash \{x_0\}) \not\subseteq V$, in particolare $f(y) \notin V$ ↯. □

Applicando la definizione di limite riscontriamo che, date f e g t.c. $f(x) \to \ell$ e $g(x) \to m$, i limiti hanno le seguenti proprietà[1]:

$(\star)$ $\lim[f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$	$(\star)$ $(m \neq 0)$ $\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \ell/m$
$(\star)$ $\lim[f(x)g(x)] = \ell m$	$(\star)$ $(m = 0)$ $\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \sigma\infty$,
	con $\sigma = \text{sgn}(f(x)g(x))$ per $x \to x_0$

Proposizione 5.15.
Siano $f, g : E \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathcal{D}(E)$. Se V è un intorno di x_0 t.c. $\forall x \in V$, $f(x) \leq g(x)$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \lim_{x \to x_0} g(x) = m \implies \ell \leq m$$

Dimostrazione. Sia $h = g - f$. $\forall x \in V \ h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ e $\lim_{x \to x_0} h(x) = m - \ell$. Se $m - \ell < 0$, per la permanenza del segno $h(x) < 0$ in un intorno di x_0 ↯. Quindi $m - \ell \geq 0$, da cui $m \geq \ell$. □

5.3 Teorema dei Carabinieri

Teorema 5.16 (Dei Carabinieri)**.**
Siano $f, g, h : E \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ t.c. $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in V \ f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \implies \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$$

Dimostrazione.
$\ell = \pm\infty$) Senza perdita di generalità poniamo $\ell = +\infty$, da cui $\forall V = (a, +\infty)$ intorno di $+\infty$, $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U$, $f(x) \in V$, cioè $a < f(x) \leq h(x) \iff h(x) \in V$, quindi $h \to +\infty$.
$\ell \in \mathbb{R}$) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U$, $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $g(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Osserviamo quindi che $\forall x \in U$ abbiamo

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon,$$

quindi $h(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, da cui $h \to \ell$. □

Osservazione 5.17.
Per $\ell = +\infty$ la condizione su g non è necessaria. Analogamente per $\ell = -\infty$ quella su f non è necessaria.

[1] Escluse le forme indeterminate, ovvero: $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ e 0∞

Corollario 5.18.
$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

Dimostrazione.
$(\impliedby)$ $\forall x \in U$ intorno di x_0 abbiamo $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Dato che $|f(x)| \to 0$, per il Teorema dei Carabinieri 5.16, $f(x) \to 0$.
$(\implies)$ $f(x) \to 0 \iff \forall\varepsilon > 0$ $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, allora $|f(x)| \in [0, \varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. □

Corollario 5.19.
Siano $f, g : E\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \to 0$, $|g(x)| \leq M \in \mathbb{R}_+$ in un intorno di x_0; allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

Dimostrazione. $-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$ in un intorno di x_0. Dato che $f(x) \to 0$, $|f(x)| \to 0$ quindi $M|f(x)| \to 0$, da cui per il Teorema dei Carabinieri $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ □

5.4 Compattezza

Definizione 5.20 (Compattezza)**.**
Dato E spazio topologico (con topologia $\mathcal{A}$), consideriamo tre definizioni:

1. E è *compatto* se $\forall R \subseteq \mathcal{A}$ *t.c.* $E \subseteq \bigcup_{\Omega\in R} \Omega$, $\exists S \subseteq R$ finito tale che
$$E \subseteq \bigcup_{\Omega\in S} \Omega.$$
2. E è *numerabilmente compatto* se vale la condizione precedente almeno per gli R numerabili.
3. E è *sequenzialmente compatto* se $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $\exists (x_{n_k})$ sottosuccessione di (x_n) tale che $x_{n_k} \to \ell \in E$.

Teorema 5.21.
Per E spazio metrico le tre definizioni sono equivalenti. In generale la terza definizione implica la prima ma non viceversa.

Proposizione 5.22.
Sia E spazio metrico compatto e $F \subseteq E$ chiuso, allora F è uno spazio metrico compatto

Dimostrazione. Sia $(x_n) \in F^{\mathbb{N}} \subseteq E^{\mathbb{N}}$. Per la compatezza sequenziale di E, $\exists (x_{n_k}) \to x \in E$. F è chiuso, quindi sequenzialmente chiuso. Dato che $(x_{n_k}) \in F^{\mathbb{N}}$ allora $x \in F$, ovvero F è compatto. □

5.4.1 Chiusi e Limitati

Proposizione 5.23.
Siano E uno spazio metrico e $F \subseteq E$ compatto, allora F è Chiuso e Limitato.

Dimostrazione. Dimostriamo le due proprietà separatamente:
(*Chiuso*) Se per assurdo F non fosse chiuso, $\exists x_0 \in \mathcal{D}(F)\backslash F$. Essendo un punto di accumulazione $\exists (x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \to x_0$. Per la compattezza di F, $\exists x_{n_k} \to x_1 \in F$, ma dato che (x_n) ha un limite, esso è unico anche passando a sottosuccessioni, dunque $F \ni x_1 = x_0 \notin F$ $\lightning$.
(*Limitato*) Se per assurdo F non fosse limitato avremmo che $\forall x_0 \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $F \nsubseteq B_n(x_0)$. Consideriamo una successione di questa forma: $x_n \in F\backslash B_{d(x_0,x_{n-1})+1}(x_0)$. Osserviamo che $\forall n \neq m$, $d(x_n, x_m) \geq 1$, quindi ogni sottosuccessione di (x_n) non converge, ma allora F non è compatto $\lightning$. □

Teorema 5.24.
Sia $F \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, allora F è compatto.

Dimostrazione.
Sia $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ e consideriamo i casi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ finito e infinito:
$finito$) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è finito allora assume frequentemente lo stesso valore $x \in F$. Sia allora $(x_{n_k}) = (x)$ una sottosuccessione di (x_n) constante, la quale quindi converge banalmente a $x \in F$.
$infinito$) Dato che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ è limitato. Allora per il teorema di Bolzano Weierstrass 4.21 $\exists (x_{n_k})$ t.c. $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}^n$. Dato che F è chiuso, è chiuso per successioni, dunque $x \in F$. □

Teorema 5.25 (Bolzano Weierstrass)**.**
Siano E uno spazio metrico e $F \subseteq E$ compatto di cardinalità infinita, allora $F \cap \mathcal{D}(F) \neq \emptyset$

Dimostrazione. Sia $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ a termini distinti. Dato che F è compatto $\exists x_{n_k} \to x \in F$ e siccome è a termini distinti $\forall k\ x_{n_k} \neq x$. Dalla definizione di limite $\forall r > 0$, $B_r(x) \cap \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$, e quindi dato che $x \notin \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\forall r > 0\ B_r(x) \cap F\backslash\{x\} \neq \emptyset$. Allora x è un punto di accumulazione di F appartenente ad F. □

Dimostrazione alternativa. Supponiamo per assurdo che F non contenga punti di accumulazione in E (e quindi neanche di $F \subseteq E$). Da questo ne discende che $\forall q \in E$, $\exists A_q \ni q$ intorno di q aperto tale che $A_q \cap F \subseteq \{q\}$. La famiglia $\{A_q\}_{q\in E}$ è un ricoprimento aperto di E, dunque, siccome E è compatto, se ne può estrarre un sottoricoprimento finito $\{A_{q_i}\}_{i\leq N}$, per un qualche $N \in \mathbb{N}$. Allora, per costruzione, si avrà che

$$F \subseteq \bigcup_{i\leq N} A_{q_i} \cap F \implies |F| \leq \left|\bigcup_{i\leq N} A_{q_i} \cap F\right| \leq N,$$

ma questo è assurdo, poichè la cardinalità di F si suppone infinita $\lightning$. □

5.5 Successioni di Cauchy

Definizione 5.26 (Successione di Cauchy)**.**
Sia E uno spazio metrico e $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. (x_n) è *di Cauchy* se $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n, m > n_\varepsilon\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Proposizione 5.27.
Se (x_n) ha limite è di Cauchy

Dimostrazione. Dalla definizione di limite $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n > n_\varepsilon\ d(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, quindi $\forall n, m > n_\varepsilon$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon.$$

□

Osservazione 5.28.
Se (x_n) è di Cauchy allora (x_n) è limitata.

Osservazione 5.29.
Una successione di Cauchy potrebbe non convergere, per esempio una successione su $\mathbb{Q}$ che tende a $\sqrt{2}$.

Proposizione 5.30.
Sia $(x_n) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ di Cauchy, allora $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione. Dato che (x_n) è di Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = S$ è limitato. Se $|S| \in \mathbb{N}$, S assume frequentemente lo stesso valore ed essendo di Cauchy questo è il limite. Se $|S| = \infty$ per Bolzano Weierstrass $\exists x \in \mathcal{D}(S)$, ovvero $\exists x_{n_k} \to x$ e dato che (x_n) è di Cauchy $x_n \to x$. □

5.6 Spazi Completi, Normati e di Banach

Definizione 5.31 (Spazio Completo)**.**
E spazio metrico è *completo* se $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ di Cauchy $x_n \to x \in E$.

Teorema 5.32 (Baire)**.**
Sia E uno spazio Metrico Completo, $F_n \subseteq E$ una famiglia di chiusi t.c. $\operatorname{int} F_n = \emptyset$, allora

$$F = \bigcup_n F_n \implies \operatorname{int} F = \emptyset.$$

Osservazione 5.33.
Se E è uno spazio metrico compatto E è completo

Osservazione 5.34.
Esistono campi ordinati completi diversi da $\mathbb{R}$ ma $\mathbb{R}$ è l'unico campo ordinato completo archimedeo

Corollario 5.35.
Essendo $\mathbb{R}$ l'unico campo ordinato completo archimedeo,

$$\mathbb{R} = {}^{\textstyle\{(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \text{ di Cauchy}\}}\big/_{\sim}, \text{ con } (x_n) \sim (y_n) \iff (x_n - y_n) \to 0.$$

Definizione 5.36 (Spazio Normato)**.**
Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Esso è *normato* se $\exists \|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0 \\
&\|x\| = 0 \iff x = 0 \\
&\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\
&\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| && \text{Subadditività}
\end{aligned}$$

Osservazione 5.37.
Ogni spazio normato è metrico ponendo $d(x, y) = \|x - y\|$

Definizione 5.38 (Spazio di Banach)**.**
Uno spazio normato E è uno *spazio di Banach* se $(E, (x, y) \mapsto \|x - y\|)$ è completo.

Capitolo 6

Funzioni Continue

Definizione 6.1 (Continuità)**.**
Siano E e F spazi metrici. Siano $f : E \to F$ e $x_0 \in E$. f è *continua* in x_0 se vale una delle seguenti condizioni:

- x_0 è di accumulazione e
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$
- x_0 è isolato.

Osservazione 6.2.
Dalla definizione di limite ricaviamo che f continua in $x_0 \iff \forall V$ intorno di $f(x_0)$, $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(U) \subseteq V$.

Definizione 6.3 (Continuità su un Insieme)**.**
$f : A \to B$ è *continua su* $E \subseteq A$ se $\forall x \in E$, f continua in x.

6.1 Proprietà delle funzioni Continue

Date $f, g : E \to \mathbb{R}$ continue in x_0 valgono le seguenti proprietà:

($\star$) $f \pm g$ continua in x_0

($\star$) fg continua in x_0

($\star$) $g(x_0) \neq 0 \implies \dfrac{f}{g}$ continua in x_0

($\star$) $\forall c \in \mathbb{R}$, cf continua in x_0

Osservazione 6.4.
L'insieme delle funzioni continue su E è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Teorema 6.5 (Permanenza del Segno)**.**
Sia f continua in x_0 con $f(x_0) \gtrless 0 \implies \exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U$, $f(x) \gtrless 0$.

Dimostrazione. Basta applicare la permanenza del segno 5.14 al limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$. □

Teorema 6.6 (Composizione)**.**
Sia $f : E \backslash \{x_0\} \to F$ con F ed E spazi metrici, x_0 punto di accumulazione e $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Sia $g : F \to G$ continua in y_0. Allora $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0)$, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Dimostrazione. Sia V intorno di $g(y_0)$, da cui per la continuità di g abbiamo che $\exists U$ intorno di y_0 tale che $g(U) \subseteq V$. Inoltre $\exists W$ intorno di x_0 t.c. $f(W) \subseteq U$, quindi $g(f(W)) \subseteq V$. □

Corollario 6.7.
Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è continua in x_0.

Proposizione 6.8 (Continuità per successioni)**.**
Una funzione $f : E \to F$ è continua in $x_0 \in E$ se e solo se $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \to x_0$ abbiamo $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

Dimostrazione.
($\Longrightarrow$) $\forall U$ intorno di $f(x_0)$, $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $f(V) \subseteq U$. Se $x_n \to x_0$ abbiamo che $\forall n > n_0$, $x_n \in V$, da cui $f(x_n) \in f(V) \subseteq U \implies \lim_n f(x_n) = f(x_0)$
($\Longleftarrow$) Per assurdo supponiamo f discontinua. Allora $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in B_{1/n}(x_0)$ tale che $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x_0))$. Ma allora $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \not\to f(x_0)$ $\lightning$. $\square$

Teorema 6.9 (Weierstrass)**.**
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ continua su E spazio metrico compatto, allora f ammette massimo e minimo in E, ovvero

$$\exists m, M \in E \text{ t.c. } \forall x \in E,\ f(m) \leq f(x) \leq f(M)$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \inf f(E) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e sia $(y_n) \in f(E)^{\mathbb{N}}$ con $y_n \to \ell$. Allora possiamo costruire una successione $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ t.c. $y_n = f(x_n)$. Dato che E è compatto $\exists x_{n_k} \to m \in E$. f è continua su E, quindi $f(m) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = \ell$, quindi m è un punto di minimo. Analogamente troviamo il massimo. $\square$

6.2 Funzioni Lipschitziane

Definizione 6.10 (Funzione Lipschitziana)**.**
$f : E \to F$ è $L-$*Lipschitziana* se $\forall x, y \in E$, $d(f(x) - f(y)) \leq L d(x, y)$.

Proposizione 6.11.
Se f è Lipschitziana allora è continua.

Dimostrazione. Se f è $L-$Lipschitziana allora $0 \leq d(f(x) - f(x_0)) \leq L d(x, x_0)$. Quindi considerando il limite per $x \to x_0$, $d(x, x_0) \to 0$, quindi per il Teorema dei Carabinieri (5.16) $d(f(x) - f(x_0)) \to 0$, da cui $f(x) \to f(x_0)$. $\square$

Definizione 6.12 (Lipschitzianità locale)**.**
$f : E \to F$ è *localmente $L-$Lipschiztiana* se $\forall x \in E$, $\exists U$ intorno di x t.c. $\exists L > 0$ t.c. $f|_U$ è $L-$Lipschitziana.

Proposizione 6.13.
Se f è localmente Lipschitziana allora è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in E$, $\exists U$ intorno di x t.c. $f|_U$ è $L-$Lipschitziana, quindi f è continua in x. Dato che questo vale $\forall x \in E$, f è continua. $\square$

Definizione 6.14 (Contrazione)**.**
Data $f : E \to E$ $L-$Lipschitziana è una *contrazione* se $L < 1$.

Teorema 6.15 (delle Contrazioni/Banach-Caccioppoli)**.**
Data $f : E \to E$ con E spazio metrico completo contrazione, $\exists!\ x \in E$ t.c. $\forall x_0 \in E$ la successione

$$\begin{cases} a_0 = x_0 \\ a_n = f(a_{n-1}) \end{cases}$$

converge a x. x è anche un punto fisso e un punto attrattivo della funzione.

Dimostrazione. Per semplicità notazionale poniamo $f^k(x_0) = a_k$.
Esistenza) Verifichiamo l'esistenza del limite $\lim\limits_k f^k(x_0)$. Dato che E è completo basta mostrare che la successione è di Cauchy:

$$d(f^k(x_0), f^{k+h}(x_0)) \leq L^k d(x_0, f^h(x_0)),$$

inoltre per la disuguaglianza triangolare

$$d(x_0, f^h(x_0)) \leq \sum_{i=1}^{h} d(f^{i-1}(x_0), f^i(x_0)) \leq \sum_{i=1}^{h} L^i d(x_0, f(x_0)),$$

portando al limite abbiamo $d(x_0, f^h(x_0)) \leq d(x_0, f(x_0)) \frac{1}{1-L}$, da cui

$$d(f^k(x_0), f^{k+h}(x_0)) \leq L^k \frac{d(x_0, f(x_0))}{1 - L} \underset{k \to +\infty}{\to} 0.$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k$ t.c. $\forall M > N > k$ abbiamo

$$d(f^N(x_0), f^M(x_0)) \leq L^{N-k} d(f^k(x_0), f^{M-N+k}(x_0)) \leq L^{N-k} \varepsilon \leq \varepsilon,$$

quindi $f^k(x_0)$ è di Cauchy, quindi ammette limite x per la completezza di E.
Unicità) Dati x_1, x_2 abbiamo che

$$d(f^k(x_1), f^k(x_2)) \leq L^k d(x_1, x_2) \to 0,$$

ovvero $\lim_k f^k(x_1) = \lim_k f^k(x_2)$ dato che entrambi i limiti esistono per quanto detto sopra.
Punto fisso) Dato che f è lipschitziana è continua, quindi

$$f(x) = f(\lim_k f^k(x_0)) = \lim_k f^{k+1}(x_0) = x.$$

Attrattivo) Sia $x_1 \in E$, osserviamo che

$$d(x, f(x_1)) = d(f(x), f(x_1)) \leq L d(x, x_1) < d(x, x_1).$$

$\square$

Capitolo 7

Calcolo dei Limiti

7.1 Criteri sulle Successioni

Proposizione 7.1.
Siano $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a termini definitivamente positivi, allora

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \implies \forall n \geq n_0, \quad a_n \geq \left(\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}\right) b_n$$

Dimostrazione. Definitivamente abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \implies \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq \frac{a_n}{b_n} \implies \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \implies a_n \geq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n.$$

□

Corollario 7.2.
$\forall n \geq n_0,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq b \implies \exists c$ t.c. $a_n \leq cb^n$

Corollario 7.3.
$\lim_n (a_{n+1}/a_n) = \ell \implies \forall b > \ell,\ \exists n_0, c$ t.c. $\forall n \geq n_0,\ a_n \leq cb^n$

Dimostrazione. $\lim_n (a_{n+1}/a_n) = \ell < b \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-\infty, b)$ definitivamente, quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ definitivamente. Dal corollario precedente segue la tesi. □

Lemma 7.4.

$$\lim_n a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Dimostrazione.
($\star$) Se $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n = 1^n = 1$, quindi la sequenza è costante con limite 1.
($\star$) Se $a > 1$, per il binomio di Newton $a^n = (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq n\varepsilon$. ε è una costante positiva, quindi per $n \to +\infty$ abbiamo $\varepsilon n \to +\infty$, da cui $a^n \to +\infty$.
($\star$) Se $|a| < 1$, $|a^n| = |a|^n = \left(\frac{1}{(1+\varepsilon)}\right)^n = \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$. Per quanto detto $(1+\varepsilon)^n \to +\infty$, quindi $a^n \to 0$.
($\star$) Se $a \leq -1$ notiamo che (a^n) non è di Cauchy dato che la differenza tra termini successivi è almeno 2, quindi se ha limite questo è infinito. Per assurdo assumiamo che il limite sia $+\infty$ e consideriamo $U \subset (0, +\infty)$ un intorno di $+\infty$. Osserviamo che se $a^n \in U$ allora $a^{n+1} \notin U$ perché cambia segno, quindi $\nexists U$ intorno di $+\infty$ t.c. $\forall n_0, \forall n \geq n_0$, $a^n \in U$, ovvero il limite non è $+\infty$. Analogamente escludiamo il caso $-\infty$, quindi la successione non ha limite. □

Proposizione 7.5 (Criterio del Rapporto)**.**
Sia $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definitivamente positiva con $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to x \geq 0$, allora

$$\lim_n a_n = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. $(\star)$ Se $x < 1$ possiamo scegliere $b \in (x, 1)$ con $a_n \leq cb^n$. c è una costante positiva e $b \in (0, 1)$, quindi $cb^n \to 0$. Per il Teorema dei Carabinieri (5.16) $a_n \to 0$.
$(\star)$ Se $x > 1$ possiamo scegliere $b \in (1, x)$ e in tal caso $a_n \geq cb^n$ definitivamente, quindi $a_n \to +\infty$. $\square$

Proposizione 7.6.
Se (x_n) è Monotona e Limitata allora è Convergente.

Dimostrazione. Per Bolzano Weierstrass (4.21) $\{x_n\}$ ha un punto di accumulazione e data la monotonia questo è unico. Se f è crescente notiamo che questo è $\sup\{x_n\}$, se è decrescente allora è $\inf\{x_n\}$. $\square$

Proposizione 7.7 (Limiti per monotone)**.**
Sia (a_n) una successione con limite ℓ e sia f una funzione monotona in un intorno di $+\infty$ t.c. $f(n) = a_n$. Allora f ha limite ℓ per $x \to +\infty$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità assumiamo f crescente. Allora

$$\ell \leftarrow a_{\lfloor x \rfloor} \leq f(x) \leq a_{\lfloor x \rfloor + 1} \to \ell,$$

quindi per il Teorema dei Carabinieri (5.16) $f(x) \to \ell$. $\square$

7.2 Simboli di Landau

Definizione 7.8 (o-Piccolo)**.**
Data f per la quale $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$$o(f) = \left\{ g \mid \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \right\}$$

è l'insieme degli *o-piccoli* di f per $x \to x_0$. Un o-Piccolo di f è anche detto *trascurabile* rispetto a f.

Definizione 7.9 (O-Grande)**.**
Data f per la quale $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$$O(f) = \{ g \mid \exists U \text{ intorno di } x_0, \exists c > 0 : \forall x \in U \backslash \{x_0\}, |g(x)| \leq c|f(x)| \}$$

è l'insieme degli O-Grandi di f per $x \to x_0$.

Osservazione 7.10.
$o(f) \subseteq O(f)$

Osservazione 7.11.
Per comodità scriveremo un elemento di $o(f)$ come $o(f)$ stesso quando questo non comporta ambiguità.

Osservazione 7.12.
Per gli o-Piccoli e gli O-Grandi valgono le seguenti proprietà (le scriveremo solo per gli o-Piccoli dato che valgono per entrambi nella stessa forma)

$$(\star)\ f \cdot o(g) = o(fg) \qquad (\star)\ o(f)o(g) = o(fg)$$

$$(\star)\ o(f) + o(g) = \begin{cases} o(f) & se\ o(g) \subseteq o(f) \\ o(g) & se\ o(f) \subseteq o(g) \end{cases}$$

Definizione 7.13 (Equivalenza Asintotica)**.**
Se $f - g = o(g)$ allora f e g sono *asintoticamente equivalenti* (per $x \to x_0$) e scriviamo $f \sim g$.

Proposizione 7.14.
Se esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f/g$, abbiamo che $\lim f/g = 1 \iff f \sim g$

Dimostrazione. $(\implies)$ $\lim f/g = 1 \implies \lim(f/g - 1) = 0$ quindi $f - g = o(g)$.
$(\impliedby)$ $\lim f/g = \lim(g + o(g))/g = \lim(1 + o(g)/g) = 1$. $\square$

Lemma 7.15.
Date f, g infinitesime con $f(x) = O(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ per $x \to 0$, allora $f \circ g = o(x^{nm}) = g \circ f$. In modo più compatto,

$$o(O(x^m)^n) = o(x^{nm}), \quad O(o(x^m)^n) = o(x^{nm})$$

Dimostrazione. $f(x) = O(x^n) \iff \exists c : |x|^n$ e $g(x) = o(x^m) = x^m o(1)$. Allora

$$f(g(x)) \leq c|g(x)|^m = c|x|^{nm} o(1)^m = o(x^{nm})$$

$$g(f(x)) = (f(x))^n o(1) \leq c^n |x|^{nm} o(1) = o(x^{nm})$$

□

Osservazione 7.16.
L'equivalenza Asintotica è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. $(Riflessiva)$ $f = f + 0$ e $0 = o(f)\ \forall f$.
$(Simmetrica)$ $\lim f/g = 1 \implies \lim g/f = 1^{-1} = 1$.
$(Transitiva)$ $f \sim g \iff f = g + o(g)$ e $g \sim h \iff g = h + o(h)$, quindi $f = h + o(h) + o(g)$. Dato che $g = h + o(h)$, $o(g) = o(h + o(h)) = o(h)$, quindi $f = h + o(h) + o(h) = h + o(h)$. □

Teorema 7.17 (Eliminazione degli Infinitesimi)**.**
Se i limiti esistono allora

$$\frac{f + o(f)}{g + o(g)} \sim \frac{f}{g}$$

Dimostrazione.

$$\frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \frac{f}{g}\left(\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}\right)$$

Osserviamo che $\frac{1+o(1)}{1+o(1)} - 1 = \frac{o(1)}{1+o(1)} = o(1)$, quindi $\frac{1+o(1)}{1+o(1)} = 1 + o(1)$, allora

$$\frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \frac{f}{g}(1 + o(1)) = \frac{f}{g} + o\left(\frac{f}{g}\right)$$

da cui la tesi. □

Corollario 7.18.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$$

Osservazione 7.19.
Per l'eliminazione degli infinitesimi abbiamo che se $f \sim f'$ e $g \sim g'$ allora $f/g \sim f'/g'$

7.3 Primi Limiti notevoli

Teorema 7.20 (Limite di Funzioni Razionali)**.**
Siano $p(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i n^i, q(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i n^i \in \mathbb{R}[n]$, allora

$$\lim_n \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} \pm\infty & N > M \\ a_N/b_M & N = M \\ 0 & N < M \end{cases}$$

Dimostrazione. Raccogliamo il termine di testa

$$p(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i n^i = a_N n^N \left(1 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i}{a_N}\frac{1}{n^{N-i}}\right) = a_N n^N \left(1 + \sum_{i=0}^{N-1} o(1)\right)$$

quindi $p(n) = a_N n^N (1 + o(1))$ e $q(n) = b_M n^M (1 + o(1))$ con $n \to +\infty$.

$$\lim_n \frac{p(n)}{q(n)} = \left(\lim_n \frac{a_N n^N}{b_M n^M}\right)\left(\lim_n \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}\right) = \lim_n \frac{a_N n^N}{b_M n^M} = \frac{a_N}{b_M} \lim_n n^{N-M},$$

da cui la tesi. □

Proposizione 7.21.
$a^{1/n} \to 1$ se $a \neq 0$, mentre $0^{1/n} \to 0$.

Dimostrazione. Dato che a^x è una funzione continua

$$\lim_n a^{1/n} = a^{\lim_n n^{-1}} = a^0$$

da cui la tesi. $\square$

Proposizione 7.22.
$\forall \alpha > 0 \ \forall a > 1, \ n^\alpha = o(a^n)$

Dimostrazione. Sia $(x_n) = (n^\alpha / a^n)$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \frac{a^n}{a^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1 \implies x_n \to 0$$

$\square$

Proposizione 7.23.
$\forall a > 1, \ a^n = o(n!)$

Dimostrazione. Sia $(x_n) = (a^n/n!)$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n} \to 0 < 1 \implies x_n \to 0$$

$\square$

Proposizione 7.24.
$n! = o(n^n)$

Dimostrazione. Sia $(x_n) = (n!/n^n)$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N}, \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$ ed è monotona crescente, dunque vale la tesi. $\square$

Riassumiamo i risultati raggiunti in questa sezione nella seguente proposizione:

Proposizione 7.25.
Ponendo $a_n \ll b_n \iff a_n = o(b_n)$, per $a > 1$ e $\alpha > 0$ vale

$$(1/a)^n \ll n^{-\alpha} \to 0, \qquad +\infty \leftarrow n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

7.4 Limiti con la Funzione Esponenziale

Proposizione 7.26.
$\lim_n (1+1/n)^n \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Per comodità sia $(x_n) = (1+1/n)^n$. La tesi segue mostrando che la succesione è Crescente e Limitata (7.6).
(*Crescente*) (x_n) crescente $\iff x_{n+1}/x_n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{1+n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} = \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \geq \\ &\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right) = \\ &= \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1\end{aligned}$$

(*Limitata*) Applicando il Binomio di Newton e sviluppando la somma della geometrica

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k}=\\ =&\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\le 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}=\\ =&1+\frac{1-1/2^n}{1-1/2}<1+2=3\end{aligned}$$

$\square$

Definizione 7.27 (Costante di Eulero)**.**
Sia $e \doteqdot \lim_n (1+n^{-1})^n$ la *costante di Eulero* (o di *Nepero*).

Osservazione 7.28.
Dato che e è definito da una successione crescente $e > (1+1^{-1})^1 = 2$ e per quanto detto prima $3 > e$. In effetti $e \approx 2.71828$.

Proposizione 7.29.
$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t$

Dimostrazione. Osserviamo che $1 + t/n \geq 0$ definitivamente, quindi la successione è ben definita. Se $t = 0$ il limite è 1 come aspettato, altrimenti abbiamo

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n/t}\right)^{n/t}\right)^t.$$

Definendo $x = n/t$ cerchiamo quindi $\lim_{x\to x_0}\left(1+x^{-1}\right)^x$ con $x_0 = \operatorname{sgn} t\infty$.
Se $t > 0$ sappiamo che $\left(1+x^{-1}\right)^x \to e$ perché monotona in x, da cui la tesi.
Se $t < 0$:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-x-1+1},$$

ponendo $y = -x-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^t = \lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}\right)^t = (e\cdot 1)^t = e^t$$

da cui la tesi. $\square$

Proposizione 7.30.
$\lim_n \frac{x^n n!}{n^n} = \begin{cases} +\infty & x > e \\ 0 & x < e \end{cases}$

Dimostrazione. Sia $(a_n) = (\frac{x^n n!}{n^n})$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{x}{e}$$

da cui la tesi per il criterio del rapporto. $\square$

Teorema 7.31 (Formula di Stirling per $n!$)**.**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Osservazione 7.32.
$\frac{e^n n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} \to +\infty$.

Proposizione 7.33.
$1 + t \leq e^t$ e per $t < 1$, $e^t \leq \frac{1}{1-t}$

Dimostrazione. Applichiamo la disuguaglianza di Bernulli (2.17)

$$e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{t}{n} = 1 + t.$$

Da $e^t \geq 1 + t$ ricaviamo $e^{-t} \geq 1 - t$ quindi per $1 - t > 0 \Longleftrightarrow t < 1$ $e^t \leq \frac{1}{1-t}$. □

Corollario 7.34.
$\log(1 + x) \leq x$ e $\frac{x}{1+x} \leq \log(1 + x)$

Dimostrazione. La prima deriva direttamente da $1 + x \leq e^x$. Osserviamo quindi che:

$$-\log(1 + x) = \log\left(\frac{1}{1 + x}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{1 + x} - 1\right) =$$

$$= \log\left(1 - \frac{x}{1 + x}\right) \leq -\frac{x}{1 + x}.$$

□

Proposizione 7.35.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, ovvero $e^x = 1 + x + o(x)$

Dimostrazione.

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1 - x} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq x\left(\frac{1}{1 - x} - 1\right)$$

Dividendo per x

$$0 \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x} \leq \frac{1}{1 - x} - 1$$

quindi per il Teorema dei Carabinieri (5.16) $e^x - 1 - x = o(x)$ da cui la tesi. □

Proposizione 7.36.
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, o equivalentemente $\log(1 + x) = x + o(x)$.

Dimostrazione.

$$\frac{x}{1 + x} \leq \log(1 + x) \leq x \Longleftrightarrow \frac{1}{1 + x} \leq \frac{\log(1 + x)}{x} \leq 1$$

$$-\frac{x}{1 + x} \leq \frac{\log(1 + x)}{x} - 1 \leq 0$$

Quindi per il teorema dei Carabinieri (5.16) $\frac{\log(1+x)}{x} - 1 \to 0$, da cui la tesi. □

Proposizione 7.37.
$\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0$ per $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Per $\alpha = 1$, ponendo $t = -\log x$,

$$\lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{t\to +\infty} -e^{-t}t = \lim_{t\to +\infty} -\frac{t}{e^t} = 0.$$

Consideriamo quindi $x^\alpha \log x = \frac{1}{\alpha} x^\alpha \log x^\alpha$ e, dato che per $x \to 0$ abbiamo $x^\alpha \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0$. □

Osservazione 7.38.
Analogamente $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-\alpha} \log x = +\infty$ per $\alpha > 0$.

Proposizione 7.39.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a}\right) \log a = 1 \cdot \log a$$

Proposizione 7.40.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\log(1 + x)}{x}\right) \frac{1}{\log(a)} = \frac{1}{\log(a)}$$

Proposizione 7.41.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\alpha\left(\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}\right)\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)=\alpha\cdot 1\cdot 1.$$

Proposizione 7.42.
$\left(1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\to e^t$

Dimostrazione. $\left(1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=e^{n\log\left(1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$, analizziamo l'esponente: detto $x=\frac{1}{n}(t+o(1))$, $(n\to+\infty\iff x\to 0)$ abbiamo

$$n\log\left(1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n\log(1+x)=n(x+o(x))=n\frac{1}{n}(t+o(1))(1+o(1)),$$

quindi $n\log\left(1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=t+o(1)$ e per la continuità dell'esponenziale $e^{t+o(1)}\to e^t$. □

Osservazione 7.43.
$n^{1/n}\to 1$

Dimostrazione. Verifichiamo che la successione è definitivamente decrescente:

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}}<n^{\frac{1}{n}}\iff(n+1)^n=n^{n+1}\iff\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$$

che è vero per $n>e$, e quindi definitivamente. Dunque $n^{1/n}\to\inf\{n^{1/n}\}_{n\geq 3}$. Verifichiamo che $\inf\{n^{1/n}\}_{n\geq 3}=1$:
($Minorante$) Per $n>1$ abbiamo $n^k\geq 1$, $\forall k\geq 0$ e dato che $\frac{1}{n}\geq 0$ abbiamo $n^{1/n}\geq 1$.
($Massimo$) Consideriamo quando la seguente disuguaglianza vale

$$n<(1+\delta)^n\iff 1<\frac{(1+\delta)^n}{n}$$

$1+\delta>1$, quindi $n=o((1+\delta)^n)$ per $n\to+\infty$, allora il membro di destra tende a infinito e quindi la disuguaglianza vale definitivamente dato che $(1,+\infty)$ è un intorno di $+\infty$. □

7.5 Limiti con le Funzioni Trigonometriche

Proposizione 7.44.
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ o equivalentemente $\sin x=x+o(x)$

Dimostrazione. Osserviamo che $\sin x\leq x\leq\tan x$, quindi

$$1\leq\frac{x}{\sin x}\leq\frac{1}{\cos x}\iff\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1$$

Per il teorema dei Carabinieri (5.16) $\frac{\sin x}{x}\to 1$. □

Osservazione 7.45.
$\tan x=x+o(x)$ dato che per $x\to 0$ $\cos x\to 1$.

Proposizione 7.46.
$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

Dimostrazione.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$

quindi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot\dfrac{1}{2}$, da cui $1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. □

7.6 Numeri Armonici

Definizione 7.47 (Numeri Armonici)**.**
Sia $H_n \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ l'$n-$esimo *numero armonico.*

Proposizione 7.48.
$H_n \geq \log(n+1)$

Dimostrazione. Dato che $\log(1+x) \leq x$, abbiamo che

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\log(k+1) - \log(k)] = \log(n+1) - 0.$$

□

Corollario 7.49.
$H_n \geq \log(n+1) \implies \lim_n H_n = +\infty$

Proposizione 7.50.
$\exists \gamma \in (0,1)$ t.c. $H_n = \log n + \gamma + o(1)$ per $n \to +\infty$.

Dimostrazione. Sia $\gamma_n = H_n - \log n$. Osserviamo che

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = H_{n+1} - \log(n+1) - H_n + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0,$$

dunque γ_n è strettamente decrescente. Dato che $\gamma_n > 0$ troviamo che $\exists \gamma : \gamma_n \to \gamma$. Quindi $H_n - \log n = \gamma_n = \gamma + o(1)$, da cui la tesi. □

7.7 Teoremi di Cesaro

Proposizione 7.51.
Data $a_n \to 0$, allora $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$

Dimostrazione. $a_n \to 0 \iff a_n = o(1)$, quindi $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} o(1) = \frac{1}{n}o(n) = o(1) \to 0.$ □

Proposizione 7.52.
Sia $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, allora $a_n \to \ell \implies \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to \ell$.

Dimostrazione. L'ipotesi è equivalente a $a_n = \ell + o(1)$, da cui

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ell + o(1)) = \ell + o(1),$$

portando al limite troviamo la tesi. □

Corollario 7.53.
Sia (a_n) a termini positivi, allora $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \implies \sqrt[n]{a_n} \to \ell$.

Dimostrazione. Sia $b_n = \log a_n$. Osserviamo che $\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\log a_n = \frac{1}{n}b_n$ e che $\log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log a_{n+1} - \log a_n = b_{n+1} - b_n$. Per le proprietà delle somme telescopiche abbiamo che $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\frac{a_{k+1}}{a_k} + b_0$, da cui

$$\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}b_n = \frac{b_0}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 0 + \log\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Quindi $\lim_n \log \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log \ell \implies \sqrt[n]{a_n} \to \ell$. □

Capitolo 8

Generalizzazioni del Limite

8.1 Limiti Direzionali

Definizione 8.1 (Limite destro)**.**
Sia $x_0 \in E \subseteq \mathbb{R}$, e $f : E \to \mathbb{R}$. Definiamo il *limite destro* come:

$$f(x^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \doteqdot \lim_{x \to x_0} f|_{E \cap (x_0, +\infty)}(x)$$

Il modo analogo definiamo il *limite sinistro* $f(x^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Osservazione 8.2.
$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \implies \exists \lim_{x \to x^\pm} f(x)$, ma non viceversa.

Proposizione 8.3.
Se $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ e $\ell^- = \ell^+$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^\pm$.

Dimostrazione. Sia $\ell = \ell^+ = \ell^-$, per l'esistenza dei due limiti abbiamo che $\forall V$ intorno di ℓ $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon_1) \cup (x_0 - \varepsilon_2, x_0), f(x) \in V$. Quindi $B_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(x_0) \backslash \{x_0\} \subseteq (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_1)$, quindi $(x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_1)$ è un intorno di x_0 e vale dunque la definizione di limite. $\square$

Proposizione 8.4.
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ Monotona, allora $\forall x_0 \in \mathcal{D}(E)$, $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x^\pm)$ e i limiti rispettano la monotonia.

Dimostrazione. $E \cap (-\infty, x_0)$ e x_0 punto di accumulazione $\implies$ $x_0 = \sup E$. Osserviamo che

$$\exists \lim_{x \to x_0} f|_{E \cap (-\infty, x_0)}(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Se f è crescente $L = \sup f(E \cap (-\infty, x_0))$, altrimenti $L = \inf f(E \cap (-\infty, x_0))$. Per il limite destro il ragionamento è analogo. $\square$

8.2 Discontinuità

Definizione 8.5 (Discontinuità)**.**
Sia $\operatorname{disc}(f) \doteqdot \{x \in E \mid f \text{ non è continua in } x\}$.
Possiamo classificare le discontinuità come segue:

$\exists \lim f \neq f(x_0)$	Eliminabile
$\exists f(x_0^+), f(x_0^-) \in \mathbb{R}$ ma $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$	Salto
$\exists f(x_0^+), f(x_0^-) \in \overline{\mathbb{R}}$ ma $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ e $(f(x_0^+), f(x_0^-)) \notin \mathbb{R}^2$	II specie
$\nexists f(x_0^+)$ o $\nexists f(x_0^-)$	III specie

Lemma 8.6.
Data (a_i) a termini positivi $\sum_{i \in I} a_i \in \mathbb{R} \implies I$ finito o numerabile.

Dimostrazione. Definiamo $I_N = \{i \in I \mid a_i \geq 1/N\}$, da cui $I = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} I_N$.

$$\frac{1}{N}|I_N| \leq \sum_{i \in I_N} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i < +\infty$$

Quindi $\forall N \in \mathbb{N},\ |I_N| \in \mathbb{N}$, quindi I è unione numerabile di insiemi finiti, quindi I è numerabile. □

Proposizione 8.7.
$f : E \to \mathbb{R}$ monotona $\implies$ disc (f) numerabile

Dimostrazione. Senza perdita di generalità sia f crescente e $x_1 < x_2$.

$$\sum_{x \in \mathrm{disc}\,(f) \cap [x_1, x_2]} [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(x_2) - f(x_1) \in \mathbb{R}$$

Per il lemma disc $(f) \cap [x_1, x_2]$ è finito o numerabile, quindi $disc(f)$ stesso è finito o numerabile. □

8.3 Limite Superiore e Inferiore

Definizione 8.8 (Limite Superiore e Inferiore)**.**
Sia $f : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}(E)$, affermiamo che f ha *limite superiore* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ in x_0, e scriviamo $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se

- $\exists (x_n) \to x_0$ *t.c.* $\lim_n f(x_n) = \ell$,
- $\forall m > \ell,\ \nexists (y_n) \to x_0$ *t.c.* $\lim_n f(y_n) = m$.

La definizione è analoga per il *limite inferiore* $\liminf_{x \to x_0} f(x)$

Osservazione 8.9.
$\forall x_0 \in \mathcal{D}(E)$, $\exists \liminf f, \limsup f$ per $x \to x_0$. Inoltre

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{U \ itrn.\ x_0} \sup_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) \geq \sup_{U \ itrn.\ x_0} \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

Osservazione 8.10.

- $\limsup f + g \leq \limsup f + \limsup g$
- $f \leq g$ in un intorno di $x_0 \implies \limsup f \leq \limsup g$
- $\exists \lim f$ per $x \to x_0 \iff \liminf f(x) = \limsup f(x)$ per $x \to x_0$.
- $\limsup(-f) = -\liminf(f)$

Definizione 8.11 (Oscillazione di f)**.**

$$\mathrm{osc}\,(f)(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \text{ isolato} \\ \limsup f - \liminf f & \text{se } x_0 \text{ di accumulazione} \end{cases}.$$

Osservazione 8.12.
$\mathrm{osc}\,(f)(x_0) > 0 \iff x_0 \in \mathrm{disc}\,(f)$

8.4 Tecniche avanzate per il Calcolo dei Limiti

Teorema 8.13 (Lemma di Fekete)**.**
Sia (a_n) una successione a termini non negativi t.c. $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, allora $\exists \lim \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}$.

Dimostrazione. Osserviamo che $a_n \leq a_1 + a_{n-1} \leq 2a_1 + a_{n-2} \leq \cdots \leq na_1$, quindi $\sigma = \inf\{\frac{a_n}{n}\} \in [0, a_1] \implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists \overline{n}$ t.c. $\frac{a_{\overline{n}}}{\overline{n}} \leq \sigma + \varepsilon$.

Fissato $\varepsilon > 0$ scriviamo per la divisione euclidea $n = k\overline{n} + r$. Allora $a_n = a_{k\overline{n}+r} \leq ka_{\overline{n}} + a_r$. Definiamo inoltre $M = \max\{a_0, \cdots, a_{\overline{n}-1}\}$.

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{k}{n} a_{\overline{n}} + \frac{M}{n} \leq \frac{k\overline{n}}{n}(\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n} = \frac{n-r}{n}(\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n} \leq \left(1 - \frac{\overline{n}}{n}\right)(\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n}.$$

Essendo $\sigma = \inf\{\frac{a_n}{n}\}$ abbiamo

$$\sigma \leq \frac{a_n}{n} \leq \left(1 - \frac{\overline{n}}{n}\right)(\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n} \to \sigma + \varepsilon.$$

Essendo ε arbitrario troviamo per il teorema dei carabinieri che $\frac{a_n}{n} \to \sigma$. $\square$

Teorema 8.14 (Limite di una successione Ricorsiva)**.**
Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua crescente e (x_n) definita da

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases},$$

allora $\exists \lim x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e se $\ell \in \mathbb{R}$ allora $\ell = f(\ell)$.

Dimostrazione. Se $f(\alpha) = \alpha$ allora (x_n) è costante, quindi la tesi vale.
Se $f(\alpha) > \alpha$ definiamo $U = \{x \mid f(x) - x > 0\} \ni \alpha$, il quale è aperto per la permanenza del segno. Siano quindi

$$a = \inf\{a' \leq \alpha \mid [a', \alpha] \subset U\} = \inf V^-,$$
$$b = \sup\{b' \geq \alpha \mid [\alpha, b'] \subset U\} = \sup V^+.$$

Abbiamo che $\forall a' \in V^-$, $f(a') - a' > 0 \implies f(a) - a \geq 0$. Ipotizziamo per assurdo che $f(a) - a > 0$, allora $\exists I$ intorno di a t.c. $\forall a' \in I$, $f(a') - a' > 0$, ma allora $a \neq \inf V^-$ $\lightning$. Abbiamo quindi $f(a) = a$ e analogamente $f(b) = b$.

Sia $a < x < b$, da cui $a = f(a) < f(x) < f(b) = b$, quindi $f((a, b)) = (a, b)$. Dato che $\alpha \in (a, b)$ ricaviamo che (x_n) è strettamente crescente e limitata da (a, b), quindi ha limite (7.6). Inoltre

$$\ell = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n) = f(l).$$

$\square$

Capitolo 9

Topologia e Continuità

9.1 Teorema dei valori Intermedi

Teorema 9.1 (degli Zeri)**.**
Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f(a)f(b) < 0$ allora $\exists x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che $f(a) < 0$ e sia $x_0 = \sup\{x \in (a, b) \mid f(x) < 0\} < b$. Affermiamo che $f(x_0) = 0$, infatti se $f(x_0) < 0$ per la permanenza del segno (5.14) $\exists \varepsilon$ t.c. $\forall x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$, $f(x) < 0$, assurdo per la definizione di x_0 $\lightning$.
Similmente escludiamo $f(x_0) > 0$. La dimostrazione è analoga per $f(a) > 0$. $\square$

Corollario 9.2 (Teorema dei valori Intermedi)**.**
Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua abbiamo

$$f([a, b]) = [\min f([a, b]), \max f([a, b])]$$

Dimostrazione. Procediamo per doppia inclusione:
($\subseteq$) Ovvio
($\supseteq$) Sia $c \in [\min f([a, b]), \max f([a, b])]$, allora per il teorema degli zeri $\exists x_0 \in [a, b]$ t.c. $(f - c)(x_0) = 0 \implies f(x_0) = c \implies c \in f([a, b])$. $\square$

9.2 Insiemi Connessi

Definizione 9.3 (Spazio Connesso)**.**
Dato uno spazio topologico E di topologia $\mathcal{A}$, esso è
Sconnesso se $\exists A, B \in \mathcal{A}\backslash\{\emptyset\}$ t.c. $A \cap B = \emptyset$ e $E = A \cup B$
Connesso se non è Sconnesso
Connesso per Archi se $\forall x, y \in E$ $\exists \gamma : [a, b] \to E$ continua t.c. $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

Osservazione 9.4.
Se $E \subseteq \mathbb{R}$ allora E connesso $\iff$ E connesso per archi $\iff$ E intervallo, semiretta o $\mathbb{R}$.

Definizione 9.5 (Insieme convesso)**.**
Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ esso è *convesso* se $\forall x, y \in E$ vale

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\} \subseteq E.$$

Osservazione 9.6.
Un insieme convesso è connesso per archi.

Teorema 9.7.
Dati E, F spazi metrici e $f : E \to F$ continua abbiamo che
E connesso $\implies$ $f(E)$ connesso, e che
E connesso per archi $\implies$ $f(E)$ connesso per archi

Dimostrazione.
($\star$) Supponiamo che $f(E)$ sia sconnesso, allora $f(E) \subseteq A \cup B$ con $A, B \subseteq F$ aperti disgiunti e $f(E) \cap A \neq \emptyset$ e $f(E) \cap B \neq \emptyset$. Da questo ricaviamo che $E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, che è unione di aperti disgiunti non vuoti, quindi E è sconnesso $\lightning$.

($\star$) Siano $y_1, y_2 \in f(E)$ e $x_1, x_2 \in E$ t.c. $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Dato che E è connesso per archi $\exists \gamma : [0,1] \to E$ continua t.c. $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Definiamo allora $\beta = f \circ \gamma$, la quale è continua essendo composizione di funzioni continue. Allora $\beta : [0,1] \to f(E)$ è una funzione continua tale che $\beta(0) = y_1$ e $\beta(1) = y_2$. Dato che quanto detto vale $\forall y_1, y_2 \in f(E)$ abbiamo che $f(E)$ è connesso per archi. $\square$

Osservazione 9.8.
$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che mandano connessi in connessi ma che non sono continue, per esempio

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Teorema 9.9.
E connesso per archi $\implies$ E connesso.

Dimostrazione. Supponiamo E sconnesso, allora $E = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti non nulli. Siano $x \in A, y \in B$, quindi $\exists \gamma : [0,1] \to E$ continua t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Allora $\gamma([0,1]) \subseteq A \cup B = E$, da cui $\gamma([0,1])$ è sconnesso, ma questo è assurdo perchè γ essendo continua mappa connessi in connessi $\lightning$. $\square$

Proposizione 9.10.
Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso allora E è connesso per archi

Dimostrazione. Sia $A = \{y \in E \mid \exists \gamma : [0,1] \to E \ cont.\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$ con $x \in E$. Osserviamo che A e $E \backslash A$ sono aperti:
Sia $y \in A$ e consideriamo $z \in B_\varepsilon(y)$. Ponendo γ il cammino che connette y a x definiamo la seguente mappa

$$\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^n \qquad \rho(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ z + 2t(z - y) & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Chiaramente ρ è continua e connette x a z. Abbiamo quindi che A è aperto.

Se $E \backslash A$ non fosse aperto allora $\exists y \in E \backslash A$ t.c $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset$, ma allora y sarebbe raggiungibile da x e quindi $y \in A$ $\lightning$.

Dato che $E = A \cup (E \backslash A)$, E è connesso, $A \cap E \backslash A = \emptyset$ e $A \neq \emptyset$ abbiamo che $E \backslash A = \emptyset$, ovvero $E = A$. Essendo x arbitrario abbiamo che $\forall x, y \in E$ e $\exists \gamma : [0,1] \to E$ continua t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, ovvero E è connesso per archi. $\square$

Osservazione 9.11.
$\exists C \subseteq \mathbb{R}^2$ chiusi e connessi ma non connessi per archi, per esempio

$$C = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) | x \in (0,1] \right\} \cup \left(\bigcup_{|y| \leq 1} (0, y) \right)$$

9.3 Compatti e Continuità

Teorema 9.12.
$f : E \to F$ continua, se E è compatto allora $f(E)$ è compatto.

Dimostrazione. Siano $(y_n) \in f(E)^{\mathbb{N}}$ e $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ t.c. $f(x_n) = y_n$. Dato che E è compatto $\exists x_{n_k} \to x \in E$. Siccome f è continua $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(E)$, quindi $f(E)$ è compatto. $\square$

Corollario 9.13 (Teorema di Weierstrass)**.**
Data $f : E \to \mathbb{R}$ continua con E compatto abbiamo che f ammette massimo e minimo

Dimostrazione. $f(E) \subseteq \mathbb{R}$ compatto $\iff$ $f(E)$ chiuso e limitato, quindi

$$\inf f(E) = \min f(E) \qquad \sup f(E) = \max f(E)$$

$\square$

Osservazione 9.14.
Non vale il viceversa, per esempio $\operatorname{sgn} x$ manda compatti in compatti ma non è continua.

Teorema 9.15.
Dati I intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua abbiamo che f iniettiva $\iff$ f strettamente monotona.

Dimostrazione.
($\Longleftarrow$) Se f è strettamente monotona, dato che $x \neq y \implies x < y$ o $x > y$, abbiamo $f(x) < f(y)$ o $f(x) > f(y)$, ovvero $f(x) \neq f(y)$.
($\Longrightarrow$) Ipotizziamo f iniettiva e per assurdo non strettamente monotona, allora $\exists x, y, z \in I$, con $x < y < z$ t.c. $f(x) < f(y)$ e $f(z) < f(y)$ oppure $f(x) > f(y)$ e $f(z) > f(y)$ (non abbiamo $\geq$ o $\leq$ perchè in tal caso f non sarebbe iniettiva).

Consideriamo il primo caso, l'altro è analogo. Siamo quindi in uno dei due casi $f(x) < f(z) < f(y)$ o $f(z) < f(x) < f(y)$, consideriamo il primo, ancora senza perdita di generalità.

Per il teorema dei valori intermedi $f([x, y]) \supseteq [f(x), f(y)] \ni f(z) \implies \exists z' \in (x, y)$ t.c. $f(z) = f(z')$, quindi f non è iniettiva $\lightning$ $\square$

Corollario 9.16.
Dato I intervallo, se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua e invertibile allora f^{-1} è continua.

Dimostrazione. Dal teorema abbiamo $f^{-1} : f(I) \to I$ strettamente monotona. Dato che I è un intervallo e i limiti direzionali per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ esistono sempre e che f^{-1} è monotona possiamo escludere discontinuità di II specie, III specie ed Eliminabili rispettivamente, quindi le uniche discontinuità possibili sono a Salto, ma in tal caso $f^{-1}(f(I)) = I$ non sarebbe connesso $\lightning$ $\square$

Corollario 9.17.
Sono continue le seguenti funzioni:

- $\arcsin(x) = \left(\sin(x)|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$
- $\arccos(x) = \left(\cos(x)|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$
- $\arctan(x) = \left(\tan(x)|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$
- $\log_a(x) = (a^x)^{-1}$

Capitolo 10

Serie

Definizione 10.1 (Serie)**.**
Una *serie* è una somma formale di elementi x_n di uno spazio vettoriale metrico V

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} x_n$$

Definiamo le quantità $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} x_n$ *somme parziali.*
Quando il primo indice della serie è chiaro o irrilevante indicheremo $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ con $\sum x_n$.

Definizione 10.2 (Convergenza)**.**
Una serie è detta *convergente* se $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \in V$. Nel caso particolare di $V = \mathbb{R}$, indicando le somme parziali con S_n, distinguiamo i seguenti tre casi:

$S_N \to x \in \mathbb{R}$	Serie *convergente*
$S_N \to \pm\infty$	Serie *divergente*
Non esiste limite	Serie *non convergente.*

Osservazione 10.3.

$$\sum x_n \text{ converge in } \mathbb{C} \iff \sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ convergono in } \mathbb{R}$$

In tal caso riscontriamo inoltre che $\sum x_n = \sum a_n + i \sum b_n$.

10.1 Criterio di Cauchy e Necessario

Proposizione 10.4 (Criterio di Cauchy)**.**
La serie è convergente se e solo se la successione delle somme parziali converge e una condizione necessaria per ciò è che questa sia di Cauchy, quindi

$$\sum x_n \textit{ converge } \implies \forall\varepsilon\exists n_\varepsilon \textit{ t.c. } \forall N, M \geq n_\varepsilon \left|\sum_{n=N+1}^{M} x_n\right| = |S_M - S_N| < \varepsilon$$

Se lo spazio metrico è completo (considereremo principalmente $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$) allora abbiamo una coimplicazione.

Proposizione 10.5 (Condizione Necessaria)**.**
$\sum x_n = S \in \mathbb{R} \implies x_n \to 0$

Dimostrazione. $x_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$ $\square$

Osservazione 10.6 (Serie Geometrica)**.**
Sappiamo che

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \begin{cases} \frac{x^{N+1}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ N+1 & x = 1 \end{cases}, \text{ e che } \lim_n x^n = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ +\infty & x > 1 \\ 0 & |x| < 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases},$$

quindi abbiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ +\infty & x \geq 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}.$$

Osservazione 10.7 (Serie Telescopiche)**.**
Sappiamo che $\sum_{n=0}^{N}[x_{n+1} - x_n] = x_{n+1} - x_0$, quindi le serie telescopiche convergono se e solo se $x_n \to x \in \mathbb{R}$, e in tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty}[x_{n+1} - x_n] = x - x_0$$

10.2 Criteri per Termini Positivi

Definizione 10.8 (Serie a Termini Positivi)**.**
$\sum x_n$ è detta a *termini positivi* se $\forall n,\ x_n \geq 0$. La condizione è equivalente a S_N crescente.

Osservazione 10.9.
Da questa definizione e dalle proprietà delle successioni crescenti troviamo che $\sum x_n = \sup S_N \in [0, +\infty]$, quindi le serie a termini positivi convergono o divergono a $+\infty$.

Proposizione 10.10 (Criterio del Confronto)**.**
Se vale definitivamente $0 \leq x_n \leq y_n$, allora abbiamo:

$$\sum x_n = +\infty \implies \sum y_n = +\infty$$

$$\sum y_n \in \mathbb{R} \implies \sum x_n \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Siano S_N le somme parziali di $\sum x_n$ e T_N quelle di $\sum y_n$. Sono entrambe crescenti definitivamente (per $N \geq n_0$), quindi convergono o divergono a $+\infty$, inoltre $S_N - S_{n_0} \leq T_N - T_{n_0}$, da cui andando a limite segue la disuguaglianza tra i limiti cercata. □

Proposizione 10.11 (Criterio di Condensazione)**.**
Sia (x_n) una successione decrescente a termini positivi. Ponendo $2^{k_0} \geq n_0$, abbiamo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R} \iff \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k x_{2^k} \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Sia $y_k = \sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} x_n$, in tal caso $\sum_{n\geq 0} x_n = x_0 + \sum y_n$ dato che siamo passati ad una sottosuccessione di una successione monotona. Per la monotonia si x_n inoltre abbiamo

$$2^k x_{2^{k+1}} \leq y_k = \sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} x_n \leq 2^k x_{2^k}$$

Ovvero $\frac{1}{2}(2^{k+1} x_{2^{k+1}}) \leq y_k \leq 2^k x_{2^k}$. Per confronto abbiamo che

$$\sum 2^k x_{2^k} \in \mathbb{R} \implies \sum y_k \in \mathbb{R},$$

e che

$$\sum y_k \in \mathbb{R} \implies \frac{1}{2} \sum 2^{k+1} x_{2^{k+1}} \in \mathbb{R} \iff \sum 2^k x_{2^k+1} \in \mathbb{R},$$

da cui la tesi. □

Osservazione 10.12 (Serie armonica generalizzata)**.**
$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dimostrazione. Se $\alpha \leq 0$ non vale la condizione necessaria, quindi la serie diverge. Se $\alpha > 0$ allora $n^{-\alpha}$ è decrescente, quindi per condensazione

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \in \mathbb{R} \iff \sum 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum (2^{1-\alpha})^k,$$

che è una serie geometrica e quindi converge se e solo se $2^{1-\alpha} < 1$, ovvero se e solo se $\alpha > 1$. □

Proposizione 10.13 (Criterio del Confronto Asintotico)**.**
Date due successioni a termini positivi (a_n) e (b_n) asintoticamente equivalenti abbiamo che

$$\sum a_n \in \mathbb{R} \iff \sum b_n \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\lim a_n/b_n = 1$, quindi $\forall\varepsilon\ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\forall n \geq n_\varepsilon\ 1-\varepsilon \leq a_n/b_n \leq 1+\varepsilon$, ovvero $(1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n$, da cui la tesi per confronto. □

Osservazione 10.14.
È sufficiente porre una delle seguenti condizioni equivalenti

- $\exists c, C > 0$ t.c. $a_n \geq cb_n$ e $b_n \geq Ca_n$ definitivamente
- $\exists c, C > 0$ t.c. $c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C$ definitivamente
- $a_n = O(b_n)$ e $b_n = O(a_n)$
- $0 < \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} < +\infty$

Proposizione 10.15 (Criterio del Rapporto)**.**
Sia a_n una successione a termini positivi non nulli, abbiamo che

- se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ definitivamente, allora $\sum a_n \in \mathbb{R}$,
- se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ definitivamente, allora $\sum a_n = +\infty$.

Dimostrazione. Scrivendo $n = n_0+k$ abbiamo $a_{n_0+k} \leq r^k a_{n_0}$ moltiplicando per la disuguaglianza incrementando l'indice al membro di sinistra. Troviamo quindi che

$$a_n \leq r^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}\right) r^n,$$

e siccome $r < 1$, $\sum r^n \in \mathbb{R}$, da cui per confronto troviamo la tesi.
Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ la successione è definitivamente crescente o costante non nulla, quindi non rispetta la condizione fondamentale. □

Osservazione 10.16.
Se $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ abbiamo che

- $r < 1 \implies \sum a_n \in \mathbb{R}$,
- $r > 1 \implies \sum a_n = +\infty$,
- $r = 1$ non fornisce alcuna informazione.

Proposizione 10.17 (Criterio della Radice)**.**
Sia a_n una successione a termini positivi non nulli, abbiamo che

- se $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ definitivamente, allora $\sum a_n \in \mathbb{R}$,
- se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ definitivamente, allora $\sum a_n = +\infty$.

Dimostrazione. Se $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ allora $a_n \leq r^n$ e siccome $r < 1$, $\sum r^n \in \mathbb{R}$, da cui la tesi per confronto.
Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ allora $a_n \geq 1$ e la successione non rispetta la condizione necessaria. □

Osservazione 10.18.
Se $\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = r$ abbiamo che

- $r < 1 \implies \sum a_n \in \mathbb{R}$,
- $r > 1 \implies \sum a_n = +\infty$,
- $r = 1$ non fornisce alcuna informazione.

Definizione 10.19 (Produttoria)**.**
Una *produttoria* è un prodotto formale di elementi positivi non nulli

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n \doteqdot \lim_N \prod_{n=0}^{N} a_n.$$

Proposizione 10.20.
Una produttoria della forma $\prod(1+a_n)$ con $a_n \geq 0$ converge se e solo se $\sum a_n$ converge.

Dimostrazione.
($\Longrightarrow$) Osserviamo che

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{N}(1+a_n) =&(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_N) = \\ &=1+\sum_{i=0}^{N}a_i+\sum_{i<j}^{N}a_ia_j+\cdots+\prod_{n=0}^{N}a_n \geq 1+\sum_{n=0}^{N}a_n,\end{aligned}$$

quindi per confronto $\prod(1+a_n) \in \mathbb{R} \implies \sum a_n \in \mathbb{R}$.
($\Longleftarrow$) Abbiamo che

$$\log\left(\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)\right) = \sum_{n=0}^{N}\log(1+a_n) \leq \sum_{n=0}^{N}a_n,$$

da cui

$$\prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leq \exp\left(\sum_{n=0}^{N}a_n\right).$$

Se $\sum a_n \in \mathbb{R}$ allora $\exp\left(\sum a_n\right) \in \mathbb{R}$, e per confronto $\prod(1+a_n) \in \mathbb{R}$. □

10.3 Serie a Termini Generali

Definizione 10.21 (Convergenza Assoluta)**.**
Sia $\sum a_n$ una serie a termini complessi, allora affermiamo che essa

- *converge semplicemente* se $\sum a_n \in \mathbb{C}$,
- *converge assolutamente* se $\sum |a_n| \in \mathbb{R}$.

Proposizione 10.22.
Se $\sum a_n$ converge assolutamente allora converge semplicemente

Dimostrazione. Se $\sum a_n$ converge assolutamente per il criterio di Cauchy $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ t.c. $\forall N, M \geq N_\varepsilon$ $\sum_{n=N+1}^{M}|a_n| \leq \varepsilon$. Applicando la disuguaglianza triangolare abbiamo che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\ t.c.\ \forall M, N \geq N_\varepsilon \qquad \left|\sum_{n=N+1}^{M}a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{M}|a_n| \leq \varepsilon$$

quindi $\sum_{n=N+1}^{M}a_n$ converge per il criterio di Cauchy. □

Proposizione 10.23 (Criterio di Leibniz)**.**
Sia (a_n) una successione definitivamente a termini positivi decrescente infinitesima. Allora $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge semplicemente.

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità n_0 pari. Dato che (a_n) è decrescente $-a_{i-1}+a_i < 0$, quindi S_{n_0+2k} è decrescente e S_{n_0+2k+1} è crescente. Esse sono anche limitate, infatti $\forall k \geq 1$ $S_{n_0+2k} \geq S_{n_0+1}$ e $S_{n_0+2k+1} \leq S_{n_0}$.

Otteniamo quindi che entrambe queste successioni convergono, $S_{n_0+2k} \to \ell$ e $S_{n_0+2k+1} \to \ell'$, e che $a_{n_0+2k+1} = |S_{n_0+2k+1} - S_{n_0+2k}| \to |\ell - \ell'|$. Per ipotesi $a_n \to 0$, quindi $a_{n_0+2k+1} \to 0$, ovvero $|\ell - \ell'| = 0 \implies \ell = \ell'$.

Questo significa che $\forall U$ *intorno di* l $\exists N$ t.c. $\forall n \geq N$ $S_N \in U$ dato che vale per quelle di indice pari e dispari, quindi la serie converge. □

Lemma 10.24 (Somma per Parti)**.**
Date $(a_i), (b_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, definendo $B_i = \sum_{k=n_0}^{i} b_k$, abbiamo che $\forall N, M > n_0$

$$\sum_{i=N}^{M}a_ib_i = \sum_{i=N}^{M}(a_i - a_{i+1})B_i + \underbrace{a_{M+1}B_M - a_N B_{N-1}}_{\text{Termini di Bordo}}$$

Dimostrazione. Osserviamo che $b_i = B_i - B_{i-1}$, da cui

$$\sum_{i=N}^{M} a_i b_i = \sum_{i=N}^{M} a_i B_i - \sum_{i=N}^{M} a_i B_{i-1} = \sum_{i=N}^{M} a_i B_i - \sum_{i=N-1}^{M-1} a_{i+1} B_i =$$

$$= \sum_{i=N}^{M} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}$$

□

Proposizione 10.25 (Criterio di Dirichlet)**.**
Siano $(a_n), (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, se

1. $a_n \to 0$
2. a_n ha variazione limitata, cioè $\sum |a_{n+1} - a_n| \in \mathbb{R}$
3. ponendo $B_N = \sum_{n=n_0}^{N} b_n$, $\exists C$ t.c. $\forall N$ $|B_N| \leq C$

allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Dimostrazione. Per il criterio di Cauchy, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ t.c. $\forall N, M \geq N_\varepsilon$, $\displaystyle\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| < \varepsilon$.
Applicando la somma per parti

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| = \left|\sum_{i=N}^{M} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=N}^{M} |a_i - a_{i+1}||B_i| + |a_{M+1}||B_M| + |a_N||B_{N-1}| \leq$$

$$\leq C \left(\sum_{i=N}^{M} |a_i - a_{i+1}| + |a_{M+1}| + |a_N|\right).$$

Dato che $\sum |a_{n+1} - a_n| \in \mathbb{R}$, la successione delle successioni parziali è di Cauchy, quindi un dato $\varepsilon > 0$, per $N, M \geq N_\varepsilon$ abbiamo $\sum_{i=N}^{M} |a_i - a_{i+1}| \leq \varepsilon/3C$, e dato che $a_n \to 0$ anche $a_N \leq \varepsilon/3C$ e $a_M \leq \varepsilon/3C$ definitivamente, quindi

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| \leq C \left(\frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3C}\right) = \varepsilon$$

quindi la serie converge. □

Corollario 10.26.
Siano $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, se

1. $a_n \to 0$
2. (a_n) monotona
3. ponendo $B_N = \sum_{n=n_0}^{N} b_n$, $\exists C$ t.c. $\forall N$ $|B_N| \leq C$

allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Dimostrazione. Se (a_n) è monotona $a_{n+1} - a_n$ ha lo stesso segno $\forall n$, quindi

$$\sum_{n=n_0}^{N} |a_{n+1} - a_n| = \left|\sum_{n=n_0}^{N} (a_{n+1} - a_n)\right| = |a_{N+1} - a_{n_0}| \to |a_{n_0}| \in \mathbb{R}$$

quindi la serie converge per Dirichlet. □

Osservazione 10.27.
Il criterio di Dirchlet estende il criterio di Leibniz ponendo $b_n = (-1)^n$, infatti $\sum_{n=n_0}^{N} (-1)^n = -1,\ 0,\ 1$ a seconda di N e n_0, in ogni caso è limitata.

Lemma 10.28.
Data $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\sum |a_{n+1} - a_n| \in \mathbb{R} \implies (a_n)$ di Cauchy $\implies (a_n)$ convergente

Dimostrazione. $\sum |a_{n+1} - a_n|$ è di Cauchy, quindi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ t.c. $\forall N, M \geq N_\varepsilon$

$$\varepsilon \geq \sum_{n=N}^{M-1} |a_{n+1} - a_n| \geq \left| \sum_{n=N}^{M-1} (a_{n+1} - a_n) \right| = |a_M - a_N|$$

quindi (a_n) è di Cauchy, da cui la tesi. □

Proposizione 10.29 (Criterio di Abel)**.**
Siano $(a_n), (b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, se

1. a_n ha variazione limitata, cioè $\sum |a_{n+1} - a_n| \in \mathbb{R}$
2. $\sum b_n \in \mathbb{R}$

allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Dimostrazione. In modo analogo alla dimostrazione del criterio di Dirichlet troviamo che

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n b_n \right| \leq \sum_{i=N}^{M} |a_i - a_{i+1}||B_i| + |a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}|$$

Per semplicità scriviamo $B_n \to B$, da cui fissato $\delta > 0$ avremo definitivamente

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n b_n \right| \leq (B + \delta) \left(\sum_{i=N}^{M} |a_i - a_{i+1}| + |a_{M+1} - a_N| \right).$$

Essendo $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergente, la successione delle somme parziali è di cauchy, quindi fissato $\varepsilon > 0$ vale definitivamente $|a_{M+1} - a_N| \leq \sum_{i=N}^{M} |a_i - a_{i+1}| < \varepsilon$, quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n b_n \right| \leq (B + \delta)(\varepsilon + \varepsilon) \to 0$$

dunque $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ è di Cauchy. □

10.4 Serie di Potenze

Definizione 10.30 (Serie di Potenze)**.**
Una serie della forma $\sum a_n z^n$ con $z \in \mathbb{C}$ e $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ è detta *serie di potenze* (complesse).

Studiamo la convergenza delle serie di potenze. Per la convergenza assoluta la serie si riduce alla forma $\sum |a_n||z|^n$. Applichiamo il criterio della Radice:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n||z|^n} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|},$$

quindi la serie converge assolutamente se $|z| < 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$ (e dunque anche semplicemente). Se invece $|z| > 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$ la serie diverge perchè in tal caso $(a_n z^n)$ non è infinitesima.

Definizione 10.31 (Raggio di Convergenza)**.**
Nel contesto delle serie di potenze definiamo

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

il *raggio di convergenza* della Serie.

Rimane ignoto il caso del bordo.

Proposizione 10.32.
Se $|z| = R$, $z \neq R$, $a_n R^n \to 0$ e $\sum |a_n R^n| \in \mathbb{R}$, allora la serie di potenze $\sum a_n z^n$ converge.

Dimostrazione.
$$\sum a_n z^n = \sum (a_n R^n)\left(\frac{z}{R}\right)^n$$

Osserviamo che per $|z| = R$, $z \neq R$

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{z}{R}\right)^n\right| = \left|\frac{1-\left(\frac{z}{R}\right)^{N+1}}{1-\frac{z}{R}}\right| \leq \frac{1+\left|\frac{z}{R}\right|^{N+1}}{\left|1-\frac{z}{R}\right|} \leq \frac{2}{\left|1-\frac{z}{R}\right|}$$

Quindi $\exists C$ t.c $\left|\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{z}{R}\right)^n\right| \leq C$ e per ipotesi $a_n R^n \to 0$ e ha variazione limitata, quindi la serie converge per il criterio di Dirichlet. □

Osservazione 10.33.
Quanto detto è analogo nel caso di una serie di potenze "traslata", ovvero della forma $\sum a_n(z-z_0)^n$. In tal caso indichiamo z_0 come il *centro* della serie, dato che essa converge assolutamente per gli z t.c. $|z-z_0| < R$.

Lemma 10.34.
Le somme parziali $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$ convergono uniformemente a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ in ogni cerchio $B_{R'}(z_0)$ con $R' < R$

Dimostrazione.
$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n \leq$$
$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|(R')^n \to 0$$

Osserviamo che il termine $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|(R')^n$ è indipendente da z, quindi la convergenza è uniforme. □

Proposizione 10.35.
La funzione $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ definita da $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ è ben definita e continua su $B_R(z_0)$.

Dimostrazione. La funzione è ben definita perché la serie è assolutamente convergente su ogni punto del dominio. Sia $w \in B_R(z_0)$ e verifichiamo che f è continua in w.

Definendo $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$ osserviamo che S_N è sempre continua in quanto polinomio; dunque dato $w \in B_R(z_0)$ abbiamo che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall z \in B_\delta(w)$ vale $|S_N(z) - S_N(w)|$.

Consideriamo ora $0 < \delta < R - |w-z_0|$, in modo tale che $B_\delta(w) \subset B_R(z_0)$. Osserviamo che per $z \in B_\delta(w)$ abbiamo $z \in B_{|w-z_0|+\delta}(z_0)$, quindi per il lemma sopra abbiamo che $S_N(z)$ converge uniformemente a $f(z)$, ovvero $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo che $\exists n_0$ t.c. $\forall N > n_0$, $\forall z \in B_\delta(w)$, $|f(z) - S_N(z)| < \varepsilon$.
Siamo pronti per stimare la distanza tra $f(z)$ e $f(w)$:

$$\begin{aligned}|f(z)-f(w)| =& |S_N(z) - S_N(w) + f(z) - S_N(z) + S_N(w) - f(w)| \leq \\ \leq& |S_N(z) - S_N(w)| + |f(z) - S_N(z)| + |f(w) - S_N(w)|.\end{aligned}$$

Per quanto detto abbiamo che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1, \delta_2, n_0 > 0$ tali che:
$\forall z \in B_{\delta_1}(w)$ abbiamo $|S_N(z) - S_N(w)| < \varepsilon$,
$\forall N > n_0$, $\forall z \in B_{\delta_2}(w)$ abbiamo $|f(z) - S_N(z)| < \varepsilon$ e $|f(w) - S_N(w)| < \varepsilon$.
Considerando allora $N > n_0$ e $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ abbiamo che

$$\forall z \in B_\delta(w),\ |f(z) - f(w)| < 3\varepsilon \to 0,$$

da cui la tesi. □

10.5 Riordinamenti di Serie

Definizione 10.36 (Riordinamento)**.**
La serie $\sum b_n$ è un Riordinamento della serie $\sum a_n$ se $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva t.c. $b_n = a_{f(n)}$.

Teorema 10.37.
Se $\sum a_n$ converge assolutamente a S e $\sum b_n$ è un suo riordinamento allora $\sum b_n$ converge assolutamente a S

Dimostrazione. Per semplicità scriviamo $\sum a_n = a$. Per la definizione di riordinamento $b_n = a_{f(n)}$ con f bigettiva. Osserviamo che $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists M \geq N$ t.c. $\{a_1, a_2, \cdots, a_N\} \subseteq \{b_1, \cdots, b_M\}$ e fissando $m \geq M$ abbiamo che esiste $R \geq m$ tale che $\{b_1, \cdots, b_m\} \subset \{a_1, a_2, \cdots, a_R\}$ (più precisamente abbiamo $M = \max(f(\mathbb{N}_N))$ e $R = \max(f^{-1}(\mathbb{N}_m)))$. Osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{m} b_n = \sum_{n=0}^{N} a_n + \left(\sum_{n=0}^{m} b_n - \sum_{n=0}^{N} a_n\right),$$

da cui

$$\left|\sum_{n=0}^{m} b_n - a\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - a\right| + \left|\sum_{n=0}^{m} b_n - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq$$
$$\leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - a\right| + \sum_{n=N+1}^{R} |a_n| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} a_n - a\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|.$$

Per $N \to \infty$ abbiamo $m \to \infty$ e

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - a\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \to 0,$$

quindi $\lim_{m\to\infty} \left|\sum_{n=0}^{m} b_n - \sum a_n\right| = 0$, ovvero $\sum a_n = \sum b_n$ □

Osservazione 10.38.
Definendo $S^+ = \sum \max(a_n, 0)$ e $S^- = -\sum \min(a_n, 0)$ le serie dei termini positivi e negativi rispettivamente di una data serie osserviamo che $\sum |a_n| \in \mathbb{R} \iff S^\pm \in \mathbb{R}$ e che $\sum a_n = S = S^+ - S^-$.

Teorema 10.39 (Riemann-Dini)**.**
Se $\sum a_n$ è una serie convergente ma non assolutamente (quindi $S^+ = S^- = +\infty$) abbiamo che $\forall S \in [-\infty, +\infty]$ $\exists \sum b_n$ riordinamento di $\sum a_n$ t.c. $\sum b_n = S$.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità ipotizziamo che ogni termine di $\sum a_n$ sia non nullo, una volta trovato un riordinamento valido basterà reinserire 0 in modo opportuno.

Siano b_n l'$n-$esimo termine positivo di (a_n) e c_n l'$n-$esimo negativo. Osserviamo che dato $r > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ $\exists M > N$ t.c $\sum_{i=N}^{M} b_i > r$, in particolare definiamo $B_r(N)$ il più piccolo tale numero. Questa affermazione è simmetrica nel caso $r < 0$ con le somme di termini di (c_n), definiamo $C_r(N)$ l'analogo indice.

Affermiamo che, dato $S \in [-\infty, +\infty]$, possiamo costruire un riordinamento $\sum d_n$ di $\sum a_n$ tale che $\sum d_n = S$.

Consideriamo dapprima il caso $S \in \mathbb{R}$: avremo $S \geq 0$ o $S < 0$, senza perdita di generalità assumiamo il primo caso. Poniamo $S_0 = S$, $\beta_0 = 0$ e $\gamma_0 = 0$ e $\forall k \geq 0$ siano

$$S'_k = \sum_{i=\beta_k+1}^{\beta_{k+1}} b_i \quad \text{e} \quad S_{k+1} = \sum_{i=\beta_k+1}^{\beta_{k+1}} b_i + \sum_{i=\gamma_k+1}^{\gamma_{k+1}} c_i = \sum_{i=\beta_k+\gamma_k+1}^{\beta_{k+1}+\gamma_{k+1}} d_i,$$

dove $\beta_{k+1} = B_{\beta_k}(S_k)$, $\gamma_{k+1} = C_{\gamma_k}(S - S'_k)$ e

$$d_i = \begin{cases} b_{i-\gamma_k} & \textit{se } \beta_k + \gamma_k < i \leq \beta_{k+1} + \gamma_k \\ c_{i-\beta_{k+1}} & \textit{se } \beta_{k+1} + \gamma_k < i \leq \beta_{k+1} + \gamma_{k+1} \end{cases}$$

Osserviamo che $\sum d_n$ è un riordinamento di $\sum a_n$ dato che la mappa da (a_n) a (d_n) è iniettiva per come abbiamo gestito gli indici e surgettiva perchè il $k-$esimo termine di (b_n) e di (c_n) viene mappato in un elemento di (d_n) entro il $k-$esimo passo dell'algoritmo. Osserviamo inoltre che $|S_k - S| < |c_{\gamma_k}| \to 0$, quindi $S_k \to S$, quindi questo riordinamento tende effettivamente a S.

Per i casi $S = \pm\infty$ (supponiamo $+\infty$ senza ledere generalità), definiamo il riordinamento ponendo come "obiettivo" k al posto di S, ovvero $\beta_0 = 0, \gamma_0 = 0$, $\beta_{k+1} = B_{\beta_k}(k)$, $\gamma_{k+1} = C_{\gamma_k}(-1)$. Così facendo otteniamo che $\sum_{n=0}^{\beta_k+\gamma_k} d_n$ è una sottosuccesione delle somme parziali di $\sum d_n$ divergente a $+\infty$, dunque $\sum d_n$ stessa diverge a $+\infty$. □

10.6 Prodotti di Serie

Date due serie convergenti cerchiamo di esprimere il loro prodotto come una serie convergente:

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\left(a_i\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j\right)$$

Vorremmo scrivere

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_ib_j$$

ma questa scrittura è ambigua in quanto non fornisce un ordine per gli addendi

Definizione 10.40 (Prodotto di Cauchy)**.**
Date due serie $\sum a_i$ e $\sum b_j$ definiamo il loro *prodotto di cauchy* come

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i+j=n} a_ib_j\right),$$

imitando il prodotto tra polinomi.

Teorema 10.41.
Se $\sum a_i = S_a$ e $\sum b_i = S_b$ convergono assolutamente allora il loro prodotto di Cauchy converge assolutamente a $S_a \cdot S_b$.

Dimostrazione. Dato che convergono assolutamente $\sum |a_i| = T_a \in \mathbb{R}$ e $\sum |b_i| = T_b \in \mathbb{R}$, osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{i+j=n}|a_ib_j| \le \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_N\times\mathbb{N}_N}|a_ib_j| = \left(\sum_{i=0}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{N}|b_i|\right) \le T_aT_b \in \mathbb{R},$$

quindi il prodotto di Cauchy converge assolutamente, quindi ogni suo riordinamento converge assolutamente allo stesso valore. Concludiamo quindi osservando che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i+j=n} a_ib_j = \sum_{i\in\mathbb{N}}\left(a_i\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j\right) = S_aS_b.$$

□

Teorema 10.42 (Mertens)**.**
Se $\sum a = S_a$ converge assolutamente e $\sum b_i = S_b$ converge allora il loro prodotto di Cauchy converge a $S_a \cdot S_b$

Osservazione 10.43.
Può essere dimostrato che date due serie di potenze $\sum a_nz^n$ con raggio di convergenza $R_a > 0$ e $\sum b_nz^n$ con raggio di convergenza $R_b > 0$ allora la serie prodotto $\sum_n c_nz^n$ con $c_n = \sum_{i+j=n} a_ib_j$ ha raggio di convergenza $R_c \ge \min(R_a, R_b)$.

Capitolo 11

Calcolo Differenziale

Data una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ con $E \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ punto di accumulazione, cerchiamo la migliore approssimazione lineare di f vicino a x_0. Graficamente questo corrisponde a cercare la retta tangente al grafico di f passante per $(x, f(x))$. Riformulando cerchiamo $y = ax + b$ t.c.

$$f(x) - (a(x - x_0) + b) = o(x - x_0).$$

Ponendo $x = x_0$ otteniamo $b = f(x_0)$, quindi abbiamo $f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0)$. Dividendo per $x - x_0$ abbiamo

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + o(1) \implies a = \lim_{x \to x_0} a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione 11.1 (Derivata)**.**
Sia

$$f'(x_0) \doteqdot \frac{df}{dx}(x_0) \doteqdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

la *derivata* di f in x_0. Se il limite esiste f è *derivabile* in x_0.

Abbiamo quindi ottenuto che la retta cercata è $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Osservazione 11.2.
Una funzione f derivabile in x_0 è continua in x_0

Dimostrazione.

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \implies \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

□

Non vale però l'implicazione opposta, infatti le funzioni che cambiano bruscamente angolazione come $|x|$ o alcune funzioni definite per tratti non risultano derivabili.

Definizione 11.3 (Derivate Direzionali)**.**
Definiamo la *derivata destra*

$$\frac{df}{dx^+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e la *derivata sinistra* analogamente.

Osservazione 11.4.
f derivabile in $x_0 \iff \exists \frac{df}{dx^\pm}(x_0)$ e $\frac{df}{dx^+}(x_0) = \frac{df}{dx^-}(x_0)$

11.1 Proprietà Algebriche della Derivata

Definizione 11.5 (Funzioni Pari e Dispari)**.**
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ essa è *pari* se $f(x) = f(-x)$ ed è *dispari* se $f(x) = -f(-x)$.

Proposizione 11.6.
f Pari $\implies$ f' Dispari, e f Dispari $\implies$ f' Pari

Dimostrazione. Supponiamo f pari

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$$

Per f dispari il procedimento è analogo. $\square$

Osservazione 11.7.
Dato $c \in \mathbb{R}$, per la linearità del limite abbiamo $(cf)'(x) = cf'(x)$.

Osservazione 11.8.
$(f \pm g)' = f' \pm g'$ per l'additività del limite.

Proposizione 11.9.
$(fg)' = f'g + fg'$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right] = \\
&= g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
&= g(x)f'(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposizione 11.10.
f derivabile in x e $f(x) \neq 0 \implies \frac{1}{f}$ derivabile in x e $(1/f)' = -f'(x)/f(x)^2$

Dimostrazione.

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{-(f(x+h) - f(x))}{hf(x+h)f(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$\square$

Osservazione 11.11.
Combinando le proposizioni precedenti troviamo che (se $g(x) \neq 0$)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Proposizione 11.12 (Chain Rule)**.**
Date f, g con g derivabile in x_0 e f derivabile in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è derivabile in x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Dimostrazione. Grazie alla definizione di derivata, approssimiamo f in $g(x)$:

$$\begin{aligned}
f(g(x+h)) &= f(g(x)) + f'(g(x))(g(x+h) - g(x)) + o(g(x+h) - g(x)) = \\
&= f(g(x)) + f'(g(x))(g(x+h) - g(x))(1 + o(1)),
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f'(g(x))(1 + o(1))(g(x+h) - g(x))}{h} = \\
&= f'(g(x)) \left(1 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(g(x))g'(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Corollario 11.13.
Data f invertibile e derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$

Dimostrazione. $f^{-1}(f(x)) = x$, derivando ambi i membri

$$((f^{-1})'(f(x)))f'(x) = 1.$$

Valutiamo in x_0:

$$f'(x_0)((f^{-1})'(f(x_0))) = 1,$$

da cui la tesi dividendo per $f'(x_0)$. $\square$

11.2 Derivate di Funzioni Elementari

Osservazione 11.14.
Osserviamo che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(ax+b)' = a$, infatti

$$(ax+b)' = \lim_{h\to 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \lim_{h \to 0} a = a$$

Osservazione 11.15 (Power Rule)**.**
$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ (x^n)' = nx^{n-1}$

Dimostrazione.

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + o(h) - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

$\square$

Corollario 11.16.
Dato $p \in \mathbb{R}[x]$ della forma $p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ con $a_N \neq 0$, otteniamo $p(x)' = \sum_{i=1}^N i a_i x^{i-1}$, che un polinomio di grado $N-1$.

Proposizione 11.17.
$\sin(x)' = \cos(x)$ e $\cos(x)' = -\sin(x)$

Dimostrazione.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} =$$

$$= \sin(x)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \cos(x)\left(\cancelto{1}{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}\right) =$$

$$= \cos(x) + \sin(x)\left(\cancelto{0}{\lim_{h\to 0} \frac{1 - 2^{-1}h^2 + o(h^2) - 1}{h}}\right) = \cos(x)$$

L'altra uguaglianza si dimostra in modo analogo. $\square$

Corollario 11.18.
$\tan(x)' = 1 + \tan(x)^2 = 1/\cos(x)^2$

Dimostrazione.

$$\tan(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)'\cos(x) - \sin(x)\cos(x)'}{\cos(x)^2} =$$

$$= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \tan(x)^2 + 1$$

$\square$

Proposizione 11.19.
$(e^x)' = e^x$

Dimostrazione.

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

$\square$

Proposizione 11.20.
Per $x \neq 0$, $\log(|x|)' = 1/x$

Dimostrazione.

$$\log(|x|)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(|x+h|) - \log(|x|)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(\left|\frac{x+h}{x}\right|\right)$$

dato che $x \neq 0$ e $x + h \to 0$, essi hanno lo stesso segno per $h < |x|$, quindi

$$\log(|x|)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\cancelto{1}{\lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}\right) = \frac{1}{x}$$

$\square$

Corollario 11.21.
Applicando la Chain Rule, troviamo che data f derivabile
$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}f'(x)$ e se $f > 0$ allora $\log(f(x))' = f'(x)/f(x)$.
Unendo questi risultati troviamo che

$$(f^g)' = (e^{g\log(f)})' = e^{g\log(f)}(g\log(f))' = f^g\left(g'\log(f) + g\frac{f'}{f}\right)$$

Corollario 11.22 (Power Rule generale)**.**
Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e limitandoci ai valori $x > 0$ abbiamo che

$$(x^\alpha)' = x^\alpha\left(0 \cdot \log(x) + \alpha\frac{1}{x}\right) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Corollario 11.23.
Dato $a > 0$, $(a^x)' = a^x(x\log a)' = \log(a)a^x$

Osservazione 11.24.
Per $x > 0$ abbiamo che $(x^x)' = x^x(x\log(x))' = x^x(\log(x) + 1)$

Osservazione 11.25.
Le derivate delle inverse trigonometriche sono:

$$\arcsin(y)' \overset{y=\sin(x)}{=} \frac{1}{\sin(x)'} = \frac{1}{\cos(x)} \overset{y^2+\cos(x)^2=1}{=} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\arccos(y)' \overset{y=\cos(x)}{=} \frac{1}{\cos(x)'} = -\frac{1}{\sin(x)} \overset{y^2+\sin(x)^2=1}{=} \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\arctan(y)' \overset{y=\tan(x)}{=} \frac{1}{\tan(x)'} = \frac{1}{1+\tan(x)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

11.3 Teoremi principali sulle Derivate

Definizione 11.26 (Massimi e Minimi Assoluti)**.**
Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, affermiamo che x_0 è un punto di *massimo assoluto* (o *globale*) di f su A se $\forall x \in A$ $f(x_0) \geq f(x)$. Analogamente definiamo un punto di *minimo assoluto*.

Definizione 11.27 (Massimi e Minimi Relativi)**.**
Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, affermiamo che x_0 è un punto di *massimo relativo* (o *locale*) di f su A se $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$ $f(x_0) \geq f(x)$. Analogamente definiamo un punto di *minimo relativo*.

Osservazione 11.28.
Ogni massimo assoluto è un massimo relativo ma non viceversa.

Teorema 11.29 (Criterio di Fermat)**.**
Dati $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{int }(A)$ punto di massimo relativo per f su A t.c. f derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Dato che $x_0 \in \text{int }(A)$ abbiamo che $\exists \delta > 0$ t.c. $B_\delta(x_0) \subseteq A$. Essendo x_0 massimo relativo $\exists \delta > \varepsilon > 0$ t.c. $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$, $f(x_0) \geq f(x)$. Osserviamo che

$$r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\begin{cases} \leq 0 & se\ x > x_0 \\ \geq 0 & se\ x < x_0 \end{cases}$$

Per la permanenza del segno $0 \geq \lim\limits_{x \to x_0^+} r(x) = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} r(x) \leq 0$, quindi $f'(x_0) = 0$. ☐

Osservazione 11.30.
Non vale il viceversa, per esempio $(x^3)'(0) = 0$ ma 0 non è un punto di massimo relativo per x^3.

Osservazione 11.31.
Per il teorema di Weierstrass (6.9) sappiamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ammette un Massimo (che indicheremo x_0). Allora si presentano tre casi:

1. $x_0 \in \{a, b\}$
2. $x_0 \in (a, b)$ ma f non derivabile in x_0

3. $x_0 \in (a,b)$ e f derivabile in x_0, in questo caso sappiamo che $f'(x_0) = 0$.

Quindi per cercare i punti di Massimo basta controllare gli estremi, i punti non derivabili e i punti stazionari (cioè a derivata nulla). Lo stesso vale per i Minimi.

Teorema 11.32 (Rolle)**.**
Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b) e t.c. $f(a) = f(b) = \ell$, allora $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $f'(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Dato che f è continua f ammette Massimo e Minimo per Weierstrass, osserviamo inoltre che $\max(f) \geq \ell \geq \min(f)$. Abbiamo due possibilità:
($\max(f) = \min(f)$) In questo caso $\forall x \in [a,b]$, $\ell \geq f(x) \geq \ell$, ovvero f è costante e la sua derivata in ogni punto di (a,b) è nulla.
($\max(f) \neq \min(f)$) Abbiamo che $\max(f) \neq \ell$ o $\min(f) \neq \ell$ (supponiamo senza perdita di generalità $\max(f) \neq \ell$), allora $\exists \xi \in [a,b] \backslash \{a,b\} = (a,b)$ t.c. $f(\xi) = \max(f)$, quindi ξ è un punto di massimo assoluto (e dunque relativo) interno a $[a,b]$, dunque per il criterio di Fermat $f'(\xi) = 0$. □

Teorema 11.33 (Darboux)**.**
Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile su $[a,b]$ abbiamo che $\forall \lambda \in [f'(a), f'(b)]$, $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $f'(\xi) = \lambda$.

Dimostrazione. Mostriamo che se $f'(a)f'(b) < 0$, $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $f'(\xi) = 0$:
Senza perdita di generalità supponiamo $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$. Per Weierstrass f ammette Minimo in ξ. $\xi \neq b$ perchè $f'(b) > 0$ e per la permanenza del segno in un intorno sinistro di b abbiamo che $f(x) - f(b) < 0$. Analogamente $\xi \neq a$. Quindi $\xi \in [a,b] \backslash \{a,b\} = (a,b)$ e per il criterio di Fermat $f'(\xi) = 0$.

Sia ora $g(x) = f(x) - \lambda x$, da cui $g'(x) = f'(x) - \lambda$. Dato che $\lambda \in [f'(a), f'(b)]$ abbiamo che $g'(a)g'(b) < 0$, da cui per quanto detto $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $g'(\xi) = 0$, ovvero $f'(\xi) = \lambda$. □

Teorema 11.34 (Lagrange)**.**
Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b) allora $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = c$.

Dimostrazione. Definiamo la funzione ausiliaria $h(x) = f(x) - c(x-a)$. Osserviamo che h è derivabile in (a,b), e infatti $h'(x) = f'(x) - c$. Osserviamo che $h(a) = f(a) - c(a-a) = f(a)$ e che $h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$, quindi $h(a) = h(b)$. Notiamo inoltre che h è continua su $[a,b]$. Abbiamo verificato le ipotesi del teorema di Rolle, dunque $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - c \implies f'(\xi) = c$. □

Corollario 11.35.
Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I e derivabile su int (I) osserviamo che

1. se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \text{int } (I) \implies f$ debolmente decrescente su I.
2. se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \text{int } (I) \implies f$ debolmente crescente su I.
3. se $f'(x) = 0 \ \forall x \in \text{int } (I) \implies f$ costante su I.

Dimostrazione.
(1.) Osserviamo che $\forall a, b \in I$ t.c. $a < b$, $[a,b] \subseteq I$, applicando Lagrange, $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \leq 0$, da cui $f(b) \leq f(a)$.
Procedendo analogamente con le rispettive ipotesi otteniamo $f(b) \geq f(a)$ per il punto (2.) e $f(b) = f(a)$ per il punto (3.). □

Corollario 11.36.
Data $f \in C^1(I)$ essa è localmente Lipschitziana.

Dimostrazione. Prendiamo $a \in I$ e un dato $\delta > 0$. $\forall x_1, x_2 \in (a-\delta, a+\delta)$ abbiamo per il teorema di Lagrange 11.34 che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$$
$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$$

per qualche $\xi \in (a-\delta, a+\delta)$. Ma allora ponendo

$$L = \max_{|\xi - a| \leq \delta} |f'(\xi)|$$

abbiamo che f è Lipschitziana su $(a-\delta, a+\delta)$, quindi f è localmente Lipschitziana su I. □

Teorema 11.37 (Cauchy)**.**
Date $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b) allora $\exists \xi \in (a,b)$ t.c. $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$.

Dimostrazione. Definiamo $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Osserviamo che h è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) con derivata $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$. Valutando agli estremi:

$$\begin{aligned} h(a) =& (f(b) - \cancel{f(a)})g(a) - (g(b) - \cancel{g(a)})f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b), \\ h(b) =& (\cancel{f(b)} - f(a))g(b) - (\cancel{g(b)} - g(a))f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b). \end{aligned}$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Rolle, dunque $\exists \xi$ t.c. $h'(\xi) = 0 \implies (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 11.38.
Con le stesse ipotesi, se $g'(x) \neq 0$ su (a, b) allora

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Osservazione 11.39.
Il teorema di Cauchy estende quello di Lagrange, ricavabile ponendo $g(x) = x$.

11.4 Derivate Successive

Possiamo definire derivate successive ricorsivamente come segue

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) \doteq f^{(n)}$$

Proposizione 11.40.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto, $x_0 \in A$, f' derivabile in un intorno di x_0 (equivalentemente $\exists f''(x_0)$). Allora

1. $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ minimo locale stretto,
2. $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ massimo locale stretto,
3. x_0 minimo locale $\implies f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$,
4. x_0 massimo locale $\implies f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$.

Osserviamo che $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ non garantisce massimi o minimi:

Dimostrazione.
1) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Per la permanenza del segno $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ in un intorno di x_0, quindi

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \implies \text{strettamente crescente} \\ f'(x) < 0 & \text{per } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \implies \text{strettamente decrescente} \end{cases}$$

Quindi x_0 è un minimo locale stretto.
2) Analogo
3) Da x_0 minimo locale e $x_0 \in A$ aperto abbiamo $\exists \varepsilon$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $f(x) \geq f(x_0)$ e $f'(x_0) = 0$.
Per il teorema di Lagrange (11.34) $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $\exists \xi_x \in (x_0, x)$ t.c. $f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Da cui

$$f''(x_0) = \lim_{\xi_x \to x_0} \frac{f'(\xi_x) - f'(x_0)}{\xi_x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{\xi_x - x_0}$$

Dato che $f'(\xi_x) \geq 0$ e che $\xi_x - x_0 > 0$, abbiamo che $f''(x_0) \geq 0$ $\square$

Osservazione 11.41.
Dimostreremo che se $f : A \to \mathbb{R}$, A intorno di x_0, f derivabile $n-$volte in x_0, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\forall k < n,\ f^{(k)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, allora:

- se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies x_0$ è minimo locale stretto,

- se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies x_0$ è massimo locale stretto,
- se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies f$ strettamente crescente,
- se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f$ strettamente decrescente.

Definizione 11.42.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, sia

$$C^n(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \text{ derivabili } n\text{−volte con } f^{(n)} \text{ continua}\}$$

Osservazione 11.43.
$C^n(A)$ è uno spazio vettoriale e possiamo definire la norma

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in A} f^{(k)}(x)$$

11.4.1 Funzioni Convesse e Concave

Definizione 11.44 (Funzioni Convesse e Concave)**.**
$f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo è *convessa* se $\forall x < y < z$ abbiamo

$$f(y) \leq f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)$$

f è *concava* se $-f$ è convessa.

Osservazione 11.45.
La disuguaglianza è equivalente a $\forall x < z, \lambda \in [0, 1]$

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)z, \qquad f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z)$$

Chiamiamo $\lambda x + (1 - \lambda)z$ una combinazione convessa di x e z.

Osservazione 11.46.
Se f è derivabile abbiamo che f è convessa se e solo se, dati $x < y$ abbiamo

$$f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \iff f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Proposizione 11.47.
Data $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile abbiamo f convessa $\iff f'$ crescente.

Dimostrazione.
($\implies$) Dati $x < y < z$ e osservando il triangolo $(x, f(x))$, $(y, f(y))$, $(z, f(z))$ abbiamo

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Portando al limite $y \to x$ il termine di sinistra e $y \to z$ il termine di destra abbiamo

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f'(z).$$

($\impliedby$) Supponiamo per assurdo f non convessa, cioè $\exists x < y < z$ t.c.

$$f(y) > f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)$$

Osservando il triangolo $(x, f(x))$, $(y, f(y))$, $(z, f(z))$ come prima troviamo

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(x)}{z - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Per il teorema di Lagrange (11.34) $\exists \alpha \in (x, y)$ e $\beta \in (y, z)$ t.c.

$$f'(\alpha) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ e } f'(\beta) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

da cui combinando con quanto detto prima abbiamo $f'(\alpha) > f'(\beta)$, ma questo è assurdo per la monotonia di f' $\lightning$.
($\Longleftarrow$ [*alternativa*]) Sia I un intorno di x_0 e fissiamo $x \in I$ tale che $x > x_0$. Nell'intervallo $[x_0, x]$ la funzione è derivabile, dunque, per il teorema di Lagrange (11.34), $\exists c \in (x_0, x)$ t.c. $f'(c)(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$. Ora, f' è crescente e $c > x_0$ dunque vale la disuguaglianza:

$$(x - x_0)f'(c) > (x - x_0)f'(x_0).$$

Sostituendo nell'espressione appena ricavata la prima equazione si ottiene che:

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

ovvero si ha che la funzione è convessa. Analogamente se si considerasse $x < x_0$ si arriverebbe ad ottenere $(x - x_0)f'(c) > (x - x_0)f'(x_0)$, poichè, per la crescenza di f', $f'(c) < f'(x_0)$ e moltiplicando ambo i membri per $(x - x_0)$ (che stavolta sarà una quantità negativa) abbiamo la relazione precedente. Così risultano coperti tutti i casi e dunque la funzione è convessa $\forall x \in I$. $\square$

Corollario 11.48.
$f : I \to \mathbb{R}$ derivabile 2−volte, f convessa $\iff f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$

Corollario 11.49.
$f : I \to \mathbb{R}$ convessa e derivabile 2−volte in $x_0 \implies f''(x_0) \geq 0$

Osservazione 11.50.
Il segno di f'' definisce degli intervalli di convessità e concavità

Definizione 11.51 (Punto di flesso)**.**
Sia $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, f derivabile in x_0 e f convessa in $(x_0 - \varepsilon)$ ma concava in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ o viceversa, x_0 è un *punto di flesso* di f.

Definizione 11.52 (Punto di flesso a tangente verticale)**.**
Dato x_0 punto di flesso di f, se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, allora x_0 è un *punto di flesso a tangente verticale.*

Proposizione 11.53.
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo aperto e f convessa, allora valgono

1. f continua su I
2. $\forall x \in I$, $\exists \frac{df}{dx^-}(x) \leq \frac{df}{dx^+}(x)$
3. $x \leq y$, $\frac{df}{dx^\pm}(x) \leq \frac{df}{dx^\pm}(y)$
4. disc$\left(\frac{df}{dx^-}\right) =$ disc$\left(\frac{df}{dx^+}\right)$ numerabile e f derivabile $\forall x \notin$ disc$\left(\frac{df}{dx^\pm}\right)$

Dimostrazione. 1) Supponiamo il punto (2). Dato che $\exists \frac{df}{dx^-}(x_0)$ abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx^-}(x_0)$$

quindi in un intorno sinistro di x_0

$$f(x) - f(x_0) = \frac{df}{dx^-}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

quindi per $x \to x_0$, $f(x) - f(x_0) \to 0$ ovvero $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Un argomento analogo vale per gli intorni destri di x_0, da cui la tesi.
2) Siano $x < y < z$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Il membro di sinistra è monotono crescente in x e il termine di destra in z, dunque portando a limite

$$\frac{df}{dx^-}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(y)$$

3) Dalla convessità

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Il membro di sinistra è monotono decrescente per $y \to x$ e quello di destra è crescente per $y \to z$, da cui

$$\frac{df}{dx^+}(x) \leq \frac{df}{dx^-}(z).$$

Unendo questo risultato al punto (2) troviamo la tesi.
4) Dalla monotonia del rapporto incrementale e dalla proposizione (8.7) abbiamo disc $\left(\frac{df}{dx^\pm}\right)$ numerabile. $\forall y \notin$ disc $\left(\frac{df}{dx^\pm}\right)$ osserviamo che, posti $x \leq y \leq z$, per il punto (3):

$$\frac{df}{dx^+}(x) \leq \frac{df}{dx^-}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(y) \leq \frac{df}{dx^+}(z).$$

Per $x \to y$ e $z \to y$, per il teorema dei carabinieri $\frac{df}{dx^-}(y) = \frac{df}{dx^+}(y)$, da cui f derivabile in y. □

Osservazione 11.54.
Le discontinuità delle derivate corrispondono ai punti angolosi.

11.5 Teorema di L'Hopital

Le derivate ci forniscono un metodo per provare a svolgere limiti della forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 11.55 (Hopital, caso $\frac{0}{0}$)**.**
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, I intorno di x_0. Date f, g continue su I, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, f, g derivabili su $I \backslash \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \backslash \{x_0\}$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Dimostrazione. Osserviamo che $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I \backslash \{x_0\}$, perché altrimenti per il teorema di Rolle (11.32) la derivata si annullerebbe tra x_0 e questo punto.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Per il teorema di Cauchy (11.37) $\exists \xi_x \in (x_0, x)$ t.c. $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$. Osserviamo inoltre che per $x \to x_0$, $\xi_x \to x_0$, quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{\xi_x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

□

Osservazione 11.56.
Non vale l'implicazione opposta, infatti $\lim \frac{f'}{g'}$ potrebbe non esistere.

Teorema 11.57 (Hopital, caso $\frac{0}{0}$ e limite all'infinito)**.**
f, g continue su $(a, +\infty)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, f, g derivabili su $(a, +\infty)$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Dimostrazione. Siano $\bar{f}(t) = f(t^{-1})$, $\bar{g}(t) = g(t^{-1})$. $\bar{f}, \bar{g}$ sono continue su $(0, a^{-1})$ e

$$\lim_{t \to 0} \bar{f}(t) = \lim_{t \to 0} \bar{g}(t) = 0$$

Troviamo inoltre

$$\bar{f}'(t) = f'(t^{-1}) \left(-\frac{1}{t^2}\right), \qquad \bar{g}'(t) = g'(t^{-1}) \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

Allora

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\bar{f}'(t)}{\bar{g}'(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(t^{-1})}{g'(t^{-1})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

Per il caso precedente del teorema di l'Hopital

$$\ell = \lim_{t \to 0^+} \frac{\bar{f}(t)}{\bar{g}(t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

□

Teorema 11.58 (Hopital, caso $\frac{\infty}{\infty}$)**.**
Sia I intorno di x_0, date f, g continue su $I \backslash \{x_0\}$, tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\ infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, f, g derivabili su $I \backslash \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \backslash \{x_0\}$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Dimostrazione. Dimostriamo in modo indipendente che $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Mostriamo la tesi per $x \to x_0^+$, l'altro caso è del tutto analogo. Un intorno destro generico di x_0 è della forma $(x_0, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$. Osserviamo che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0 + \delta)}{g(x) - g(x_0 + \delta)} \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0 + \delta)} \frac{g(x) - g(x_0 + \delta)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0 + \delta)}{g(x) - g(x_0 + \delta)} \frac{1 - \frac{g(x_0+\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta)}{f(x)}} = \frac{f(x) - f(x_0 + \delta)}{g(x) - g(x_0 + \delta)}(1 + o(1))$$

Per il teorema di Cauchy (11.37) $\exists \xi_x \in (x, x_0 + \delta)$ t.c.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0 + \delta)}{g(x) - g(x_0 + \delta)}(1 + o(1)) = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}(1 + o(1))$$

Per $x \to x_0^+$ abbiamo $\xi_x \to x_0^+$, da cui $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Per quanto detto questo mostra la tesi. $\square$

11.6 Polinomi di Taylor

Data una funzione $f(x)$, $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ e $n \in \mathbb{N}$ vorremmo trovare il polinomio $P(x)$ di grado n che approssima meglio f vicino a x_0.

Possiamo ottenere una definizione formale di questa richiesta generalizzando le approssimazioni ovvie per $n = 0$ e $n = 1$. Per $n = 0$ l'approssimazione più logica è $P_0(x) = f(x_0)$, mentre per $n = 1$ abbiamo definito la migliore approssimazione lineare tramite la derivata $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Definiamo quindi la migliore approssimazione di grado n come un polinomio $P_n(x)$ t.c.

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

Osservazione 11.59.
Non esiste sempre, per esempio f potrebbe non essere continua o differenziabile.

Osservazione 11.60.
Se esiste un polinomio che rispetta la condizione esso è unico. Siano per assurdo P e Q polinomi tali che $P - Q = o((x - x_0)^n)$. Se $P \neq Q$ esisterebbe un termine di grado inferiore a n non nullo in $P - Q$, dunque non avremmo $P - Q = o((x - x_0)^n)$ $\lightning$.

Definizione 11.61.
Data $f : I \to \mathbb{R}$, I aperto, f differenziabile $n-$volte in $x_0 \in I$, chiamiamo

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

il *polinomio di Taylor* di grado n di f in x_0. Se chiari omettiamo f e x_0.

Osservazione 11.62.
$\forall k \leq n$ $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$.

Teorema 11.63 (Peano)**.**
Sia f differenziabile $n-$volte in x_0

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{o(|x - x_0|^n)}_{\text{"resto di Peano"}}$$

Dimostrazione. La tesi è equivalente a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Applichiamo ripetutamente il teorema di L'Hopital 11.5:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{n-\text{volte}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)) = 0$$

□

Corollario 11.64.
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, A intorno di x_0, f derivabile $n-$volte in x_0, $n \in \mathbb{N}$, $\forall k < n \; f^{(k)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, allora:

- Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies x_0$ è minimo locale stretto
- Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies x_0$ è massimo locale stretto
- se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies f$ strettamente crescente
- se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f$ strettamente decrescente

Dimostrazione. Dalle condizioni sulle derivate troviamo

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Derivando abbiamo

$$f'(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})$$

Osserviamo che $\exists \varepsilon > 0$ t.c.

$$|o((x-x_0)^{n-1})| \leq \left| \frac{1}{2} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right| \qquad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

Quindi esiste un intorno di x_0 dove il segno di f' conincide con quello di $f^{(n)}(x-x_0)^{n-1}$.

Se n è dispari $\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}$, e quindi f è strettamente monotona in quell'intorno come specificato nella tesi.

Se n è pari $\operatorname{sgn}(f'(x) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x-x_0))$ ovvero la derivata cambia segno in x_0 e quindi abbiamo un massimo o un minimo in x_0 come indicato dalla tesi. □

Osservazione 11.65.
I polinomi di Taylor sono lineari $T_n(af+bg, x_0) = aT_n(f, x_0) + bT_n(g, x_0)$ e abbiamo $T_n(f', x_0) = T_{n+1}(f, x_0)'$.

11.6.1 Espansioni di Taylor elementari

- e^x in 0. Abbiamo $f^{(k)}(x) = e^x \implies f^{(k)}(0) = 1$.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

- $\frac{1}{1-x}$ in 0. Abbiamo $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^k} \implies f^{(k)}(0) = k!$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

- $\frac{1}{1+x}$ in 0. Sostituiamo $-x$ nel polinomio per $\frac{1}{1-x}$:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

- $\frac{1}{1+x^2}$ in 0. Sostituendo $-x^2$ nella serie per $\frac{1}{1-x}$ abbiamo

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$$

- $\log(1+x)$ in 0. Abbiamo $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, quindi abbiamo $T_{n+1}(f,0)(x)' = T_n(f',0)(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$, da cui

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

- $\arctan(x)$ in 0. Abbiamo $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, da cui

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

- $\sin(x)$ in 0. Abbiamo $\sin(x)' = \cos(x)$, $\cos(x)' = -\sin(x)$, $-\sin(x)' = -\cos(x)$ e $-\cos(x)' = \sin(x)$. Quindi $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ e $f^{(2k)}(0) = 0$

$$T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

  analogamente, i polinomi di Taylor per $\cos(x)$ sono

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

- $(1+x)^\alpha$ in 0 (Binomio di Newton generalizzato):

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Osservazione 11.66.
Se f è una funzione pari, i monomi addendi del polinomio di Taylor sviluppato in 0 contiene solo potenze pari di x. Analogamente per f dispari.

11.6.2 Convergenza in un intorno del punto di sviluppo

Osservazione 11.67.
Anche se $f \in C^\infty((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon))$ non è detto che $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)\ \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Quando è che $T_n(x) \to f(x)$ in un intorno di x_0? Possiamo cominciare cercando una stima dell'errore. Questo possiamo farlo generalizzando il teorema di Lagrange

Teorema 11.68 (Lagrange)**.**
Sia f derivabile $(n+1)-$volte in $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Allora $\exists t \in (x_0, x)$ o $t \in (x, x_0)$.

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{f^{(n+1)}(t)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{"Resto di Lagrange"}}$$

Lemma 11.69 (Rolle completo)**.**
Sia g derivabile $(n+1)-$volte in (a,b), $g^{(k)}(a) = g(b) = 0 \implies \exists t \in (a,b)$ t.c. $g^{(n+1)}(t) = 0$.

Dimostrazione. Applichiamo Rolle ripetutamente. $\exists t_1$ t.c. $g'(t_1) = 0$, ora applichiamo Rolle a g' in $[a, t_1]$, quindi $\exists t_2$ t.c. $g''(t_2) = 0, \cdots\ \exists t = t_{n+1}$ t.c. $g^{(n+1)}(t) = 0$. □

Dimostrazione (Lagrange). Senza perdita di generalità supponiamo $x > x_0$. Applichiamo il lemma in (x_0, x) con

$$g(t) = \underbrace{f(t) - T_n(t)}_{f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0)} - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \underbrace{(t-x_0)^{n+1}}_{\to 0}$$

dato che $\forall k \leq n$ $g^{(k)}(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$. Quindi per il lemma $\exists t \in (x_0, x)$ t.c. $g^{(n+1)}(t) = 0$.

$$0 = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \implies f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

□

Corollario 11.70.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dimostrazione. Dal teorema di Lagrange, con $|t| < |x|$

$$e^x - T_n(x) = e^t \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \implies |e^x - T_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

□

Definizione 11.71 (Serie di Taylor)**.**
Data f infinitamente derivabile in x_0, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

è la *serie di Taylor* di f in x_0. Per comodità indicheremo la serie di Taylor per f in x_0 con $T_\infty(f, x_0)(x)$, o nel caso il contesto non presenti ambiguità $T_\infty(x)$.

Lo stesso ragionamento che abbiamo usato per mostrare che e^x coincide con la sua serie di Taylor in 0 ci permette di concludere che

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

e che per $|x| < 1$ le funzioni $\log(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\arctan(x)$, $\frac{1}{1+x^2}$ coincidono con la loro serie di Taylor in 0.

11.7 Funzioni Analitiche

Definizione 11.72 (Funzione analitica)**.**
Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in C^\infty(A)$ è *analitica* in A se $\forall x_0 \in A$ $\exists r > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Proposizione 11.73.
Sia $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze con $x \in (x_0 - R, x_0 + R) = I$ con R il raggio di convergenza. Allora $f \in C^\infty(I)$ e $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Dimostrazione. Per la convergenza uniforme delle serie di potenze si può dimostrare che

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1},$$

da cui $f \in C^\infty$ e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dx^k}(x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!}(x-x_0)^{n-k} \implies f^{(k)}(x_0) = a_k k!.$$

□

Lemma 11.74.

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, |x| < 1$$

Dimostrazione. Derivando $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}$ $k-$volte troviamo la tesi. $\square$

Proposizione 11.75.
Data f serie di potenze $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, $x \in I = (x_0 - R, x_0 + R)$ con R il raggio di convergeza della serie, allora f è analitica in I

Dimostrazione. La tesi è equivalente a mostrare che $\forall x_1 \in I$, $\exists r > 0$ t.c. $f(x) = T_\infty(f, x_1)(x)$, $\forall x \in (x_1 - r, x_1 + r)$.

Fissiamo $x_1 \in I$ e calcoliamo la derivata $k-$esima di f in x_1:

$$f^{(k)}(x_1) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!}(x_1 - x_0)^{n-k}.$$

Osserviamo che $\forall 0 < r < R$ abbiamo $|a_n| \leq \frac{C}{r^n}$ definitivamente dato che $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$. Scegliendo $r \in (|x_1 - x_0|, R)$ abbiamo

$$|f^{(k)}(x_1)| = \frac{C}{r^n} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{|x_1 - x_0|}{r}\right)^{n-k} \overset{Lemma}{=} \frac{C}{r^n} \frac{k!}{(1 - \frac{|x_1 - x_0|}{r})^{k+1}} =$$

$$= \frac{Cr}{r - |x_1 - x_0|} \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^k} = C' \frac{k!}{(r - |x_1 - x_0|)^k},$$

quindi

$$\left| \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} \right| \leq \frac{C'}{(r - |x_1 - x_0|)^k}$$

Allora la serie $\sum \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_1)^k$ converge se $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$ (in questo caso abbiamo una serie geometrica convergente). In particolare converge nell'intervallo $(x_1 - (R - |x_1 - x_0|), x_1 + R - |x_1 - x_0|)$.

Sia allora $g(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x_1)^k$ e verifichiamo che coincide con $f(x)$. Siano S_n le somme parziali per g, ovvero $S_n \to g$. Stimiamo $f - S_n$: essendo $S_n = T_n(f, x_1)$, per il teorema di Lagrange 11.68 abbiamo

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}|x - x_1|^{n+1} \qquad \text{per } y \text{ tra } x \text{ e } x_1$$

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{C|x - x_1|^{n+1}}{(r - |y - x_0|)^{n+1}}$$

Abbiamo che per $|x - x_1| < r - |y - x_0|$ la successione tende a zero, ovvero vale la tesi. Osserviamo che questa condizione vale per $x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1)$ se $2r_1 < R - |x_0 - x_1|$. Allora per ogni $x_1 \in I$ $\exists r_1$ t.c. $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (x_1 - r_1, x_1 + r_1)$: questa è la definizione di una funzione analitica in x_1. $\square$

Corollario 11.76.
Siano f, g analitiche su I intervallo aperto, allora $\exists x_0 \in I$ t.c. $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ $\forall k \in \mathbb{N} \implies f|_I = g|_I$.

Dimostrazione. Sia $A = \{x \in I \mid \forall k \ f^{(k)}(x) = g^{(k)}\}$. $\forall x \in A$ $\exists r > 0$ t.c. $(x - r, x + r) \subseteq A$ entro il quale $f = g$, dato che per il lemma precedente entrambe coincidono con la propria serie di Taylor e queste coincidono per la definizione di A. Quindi A è aperto in I.

Sia x_n una successione a valori in A. $x_n \to x \in I$ essendo f e g continue (coincidendo con la serie di Taylor, la quale è una serie di potenze), abbiamo che $f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x)$. Un ragionamento analogo vale per $f^{(k)}$ e $g^{(k)}$, dato che $f, g \in C^\infty(I)$. Quindi $x \in A$, ovvero A è chiuso.

Dato che $x_0 \in A$, $A \neq \emptyset$, dunque per la connessione di I abbiamo $A = I$. $\square$

Osservazione 11.77.
Le funzioni analitiche sono uno spazio vettoriale.

Corollario 11.78.
Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ analitiche con I intervallo aperto. Sia $x_n \in I$ una successione convergente in I con $x_n \to x_0 \in I$. Allora $\forall n$ $f(x_0) = g(x_n) \implies f = g$ in I.

Dimostrazione. Consideriamo $h = f - g$, la quale è analitica. Abbiamo che $\forall n$ $h(x_n) = 0$ e vogliamo mostrare che $h = 0$. Passando al limite, abbiamo $h(x_0) = 0$. Applicando il teorema di Rolle 11.32 $\forall x_n$ $\exists x_n^{(1)}$ tra x_0 e x_n t.c. $h'(x_n^{(1)}) = 0$ $\forall n$. Passando al limite $x_n^{(1)} \to x_0$ abbiamo $h'(x_0) = 0$. Reiterando troviamo $h^{(k)}(x_0) = 0$ $\forall k$, quindi $h = 0$ per il corollario precedente in quanto analitica, quindi $f = g$. $\square$

Effettivamente notiamo che possiamo comporre le funzioni analitiche nei modi standard e ottenere nuovamente una funzione analitica:

Teorema 11.79.
(1) f, g analitiche in $I \implies f \cdot g$ analitica
(2) f, g analitiche in I, $g \neq 0 \implies f/g$ analitica
(3) $f : I \to J$ analitica, $g : J \to K$ analitica $\implies g \circ f$ analitica
(4) $f : I \to \mathbb{R}$ analitica in I intervallo e $f' \neq 0 \implies f^{-1}$ analitica.

Proposizione 11.80.
$f : I \to \mathbb{R}$ è analitica se e solo se $f \in C^\infty(I)$ e $\forall x_0 \in I,\ \exists r > 0, C > 0, R > 0$ t.c. $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

$$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \leq CR^k$$

Dimostrazione. $\Longleftarrow$) f è analitica se la serie $\sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ converge $\forall x_0 \in I$ e $\forall x_0 \in I,\ \exists r > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ la serie coincide con f.

Dalle ipotesi abbiamo

$$\left| \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| \leq \sum \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}|x - x_0|^k \leq \sum CR^k|x - x_0|^k$$

Quindi per $R|x - x_0| < 1$ la serie converge. Scegliamo $x \in (x_0 - R^{-1}, x_0 + R^{-1}) \cap (x_0 - r, x_0 + r)$. Sia r_1 un raggio valido. Siano allora S_n le somme parziali della serie e stimiamo $|f(x) - S_n(x)|$ per gli $x \in (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$. Per Lagrange 11.68 abbiamo

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq C(Rr_1)^{n+1} \to 0$$

Allora f è analitica su $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$. Ma $x_0 \in I$ e coincidendo con la serie, le derivate di f e della serie in x_0 coincidono, quindi f coincide con la propria serie di Taylor su tutto I.

$\Longrightarrow$) Abbiamo già notato $f \in C^\infty(I)$, il resto deriva dal fatto che la serie di Taylor deve convergere $\forall x_0 \in I$. □

Definizione 11.81 (Prolungamento analitico)**.**
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ analitica su I intervallo. Definiamo l'unione di due funzioni come segue: date $h_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ e $h_2 : J_2 \to \mathbb{R}$, sia

$$h_1 \cup h_2(x) = \begin{cases} h_1(x) & x \in J_1 \\ h_2(x) & x \in J_2 \end{cases}$$

L'operazione è ben definita in quanto $I \subset J_1 \cap J_2$, e quindi $h_1 = h_2$ sulla intersezione per le proposizioni precedenti.

Definiamo allora il *prolungamento analitico* di f come

$$g = \bigcup \{h \mid h : J \to \mathbb{R} \text{ analitica}, J \supseteq I \text{ intervallo}, h|_I = f\}.$$

Capitolo 12

Integrali

12.1 Definizione e integrabilità

12.1.1 Suddivisioni

Dato l'intervallo chiuso $[a, b]$, possiamo suddividerlo in altri intervalli, per esempio prendendo una collezione di punti dell'intervallo e considerarli come estremi

Definizione 12.1 (Suddivisione)**.**
$\pi = \{t_0, \cdots, t_n\} \subset \mathbb{R}$ è una suddivisione o partizione dell'intervallo $[a, b]$ se $t_0 = a$, $t_n = b$ e $\forall i < j \in \mathbb{N}_n \cup \{0\}$ $t_i < t_j$.
Questo insieme di punti definisce una famiglia di intervalli $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ tale che $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$.
Per comodità indicheremo con $|I_k|$ l'ampiezza dell'intervallo I_k, ovvero $t_k - t_{k-1}$.

Definizione 12.2 (Suddivisione fine)**.**
Date π_1, π_2 suddivisioni di $[a, b]$ affermiamo che π_1 è più fine di π_2 se $\pi_2 \subset \pi_1$.

Osserviamo che $\pi_1 \cup \pi_2$ è una partizione più fine sia di π_1 che di π_2, mentre abbiamo che ogni partizione è più fine di $\{a, b\}$.

12.1.2 Somme superiori e inferiori

Ci interroghiamo su come poter stimare l'area compresa tra il grafico di una funzione e l'ascissa in un dato intervallo $[a, b]$. Possiamo costruire una approssimazione dividendo $[a, b]$ in segmenti più piccoli e per ognuno di questi sovrastimare e sottostimare l'area stessa con dei rettangoli.

Definizione 12.3 (Somme superiori e inferiori)**.**
Data $\pi = \{t_0, \cdots, t_n\}$ una suddivisone di $[a, b]$ definiamo

$$S(f, \pi) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sup_{[t_{k-1}, t_k]} f = \sum_{k=1}^n |I_k| M_k(f)$$

la somma superiore di f secondo la suddivisione π. Analogamente abbiamo la somma inferiore

$$s(f, \pi) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \inf_{[t_{k-1}, t_k]} f = \sum_{k=1}^n |I_k| m_k(f)$$

Osservazione 12.4.
$M_k(f) \geq m_k(f) \implies S(f, \pi) \geq s(f, \pi)$

Intuitivamente osserviamo che raffinando la suddivisione la stima migliora. In particolare la somma superiore tende a diminuire, essendo una stima in eccesso, mentre la somma inferiore tende ad aumentare. Possiamo formalizzare questa intuizione nella seguente proposizione.

Proposizione 12.5.
Date π_1 una suddivisione di $[a, b]$ π_2 una suddivisione di $[a, b]$ più fina di π_1, abbiamo che per $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata

$$S(f, \pi_1) \geq S(f, \pi_2) \qquad s(f, \pi_1) \leq s(f, \pi_2)$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo $\pi_1 = \pi$ e $\pi_2 = \pi \cup \{t'\}$. Possiamo ricostruire le altre suddivisioni finite aggiungendo più punti. Mostriamo il caso per la somma superiore, quello per la somma inferiore è del tutto analogo.

Supponiamo $t_{k_0} < t' < t_{k_0+1}$, allora, ponendo $I' = [t_{k_0}, t']$ e $I'' = [t', t_{k_0+1}]$

$$S(f, \pi_1) - S(f, \pi_2) = |I_{k_0}| \sup_{I_{k_0}} f - \left(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f \right) =$$

$$= |I'| \left(\sup_{I_{k_0}} f - \sup_{I'} f \right) + |I''| \left(\sup_{I_{k_0}} f - \sup_{I''} f \right) \geq 0$$

□

Formalizziamo l'intuizione grafica che, siccome ogni somma superiore ha area maggiore di quella del grafico e ogni somma minore ha area minore del grafico, ogni somma superiore supera ogni somma inferiore

Proposizione 12.6.
Date $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e π_1, π_2 suddivisioni di $[a, b]$ abbiamo

$$S(f, \pi_1) \geq s(f, \pi_2).$$

Dimostrazione. Sia $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, la quale raffina entrambe le suddivisioni. Abbiamo quindi la seguente catena di disuguaglianze

$$S(f, \pi_1) \geq S(f, \pi) \geq s(f, \pi) \geq s(f, \pi_2)$$

□

Definizione 12.7 (Integrale superiore e inferiore)**.**
Definiamo l'integrale superiore $S(f)$ di f su $[a, b]$ come

$$S(f) = \inf\{S(f, \pi) \mid \pi \text{ suddivisione finita di } [a, b]\}$$

analogamente definiamo l'integrale inferiore $s(f)$ come

$$s(f) = \sup\{s(f, \pi) \mid \pi \text{ suddivisione finita di } [a, b]\}$$

Proposizione 12.8.
$S(f) \geq s(f)$

Dimostrazione. Data π_1 suddivisione di $[a, b]$ abbiamo

$$S(f, \pi_1) \geq s(f, \pi) \quad \forall \pi \text{ suddivisione di } [a, b],$$

quindi $S(f, \pi_1)$ è un maggiorante di $\{s(f, \pi) \mid \pi \text{ suddivisione finita di } [a, b]\}$, allora dalla definizione del supremo come minimo dei maggioranti abbiamo

$$S(f, \pi_1) \geq s(f) \quad \forall \pi_1 \text{ suddivisione di } [a, b].$$

Da questa formula troviamo quindi anche che $s(f)$ è un minorante per $\{S(f, \pi) \mid \pi \text{ suddivisione finita di } [a, b]\}$, da cui per definizione di infimo $S(f) \geq s(f)$. □

12.1.3 Integrabilità

Definizione 12.9 (Integrabilità)**.**
Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata essa è *integrabile* (secondo Riemann) su $[a, b]$ se e solo se $S(f) = s(f)$ e in tal caso chiamiamo il valore comune ai due integrali *l'integrale* di f tra a e b e lo denotiamo

$$\int_a^b f(t)dt$$

Osservazione 12.10.
È possibile che $S(f) > s(f)$, per esempio questo è il caso per

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}|_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

infatti $S(\chi_{\mathbb{Q}}|_{[a,b]}, \pi) = b - a$ e $s(\chi_{\mathbb{Q}}|_{[a,b]}, \pi) = 0$ per ogni π.

Osservazione 12.11.

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

Proviamo quindi a dare alcuni criteri per riconoscere le funzioni integrabili.

Proposizione 12.12.
f integrabile $\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\pi$ suddivisione di $[a,b]$ t.c. $0 \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon$.

Dimostrazione. $\implies$) $S(f) = s(f) = \int_a^b f(t)dt$. Fissiamo $\varepsilon > 0$, allora essendo $S(f)$ un infimo $\exists\pi_1$ t.c. $S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(f,\pi_1)$. Analogamente $\exists\pi_2$ t.c. $s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\pi_2)$. Sia allora $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Abbiamo

$$S(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(f,\pi_1) \geq S(f,\pi) \quad s(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\pi_2) \leq s(f,\pi).$$

Abbiamo quindi $\varepsilon > S(f,\pi) - s(f,\pi) \geq 0$.
$\impliedby$) $\forall\varepsilon > 0$ abbiamo $0 \leq S(f) - s(f) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$ e quindi $S(f) - s(f) = 0$. □

Proposizione 12.13.
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona allora è integrabile.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità sia f crescente. Abbiamo quindi $\forall x \in [a,b]\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, ovvero f è limitata su $[a,b]$.

Sia $\pi_n = \{a + k\frac{b-a}{n} \mid 0 \leq k \leq n\}$ la suddivisione uniforme di $[a,b]$ in n parti. Abbiamo quindi $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Dato che f è crescente, il supremo coincide con l'estremo destro e l'infimo con il sinistro, da cui

$$S(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} f(t_k) \qquad s(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} f(t_{k-1})$$

$$\begin{aligned} S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) &= \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) = \\ &= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Quindi per la proposizione precedente f è integrabile. □

Proposizione 12.14.
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana allora è integrabile.

Dimostrazione. Se f è $L-$Lip allora è continua e quindi limitata. Sia π una suddivisione e siano I_k gli intervalli da essa indotti. Poniamo $\delta = \max\{|I_k|\}$ il parametro di finezza di π.

Essendo la funzione limitata $\sup_{I_k} f = \max_{I_k} f = f(\xi_k)$ e analogamente $\inf_{I_k} f = f(\eta_k)$.

$$S(f,\pi) = \sum |I_k| \sup_{I_k} f = \sum |I_k| f(\xi_k), \quad s(f,\pi) = \sum |I_k| \inf_{I_k} f = \sum |I_k| f(\eta_k)$$

$$\begin{aligned} S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum |I_k|(f(\xi_k) - f(\eta_k)) &\overset{L-Lip}{\leq} \sum L|\xi_k - \eta_k||I_k| \leq \\ &\leq \sum L\delta|I_k| = L\delta(b-a) \end{aligned}$$

Ma allora raffinando la partizione il membro di destra tende a zero, quindi per la proposizione 12.12 f è integrabile. □

12.2 Continuità uniforme

Definizione 12.15 (Continuità uniforme)**.**
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo è uniformemente continua se

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ t.c.\ \forall x, y \in I, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Osservazione 12.16.
Ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua.

Dimostrazione. Se f è $L-$Lipschitziana abbiamo $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$. Se consideriamo quindi $\delta = \varepsilon/L$ abbiamo

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y| < L\delta = \varepsilon.$$

□

Teorema 12.17 (Heine-Cantor)**.**
Se $f : C \to \mathbb{R}$ è continua su $C \subseteq \mathbb{R}$ compatto allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Per assurdo $\exists\varepsilon > 0$ t.c. $\forall\delta_n = \frac{1}{n}$ $\exists x_n, y_n \in C$ t.c. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Essendo C compatto possiamo estrarre un limite dalle successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passando a sottosuccessioni $x_{n_k} \to x \in C$, $y_{n_k} \to y \in C$. Dato che $|x_n - y_n| \to 0$ abbiamo $x = y$.

$$\varepsilon \leq \lim |f(x_n) - f(y_n)| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

che è un assurdo perché abbiamo $\varepsilon > 0$ $\lightning$. □

Proposizione 12.18.
Una combinazione lineare di funzioni uniformemente continue è uniformemente continua.

Dimostrazione.
<u>Prodotto per scalari</u>) Sia $r \in \mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Se $r = 0$ chiaramente $0 = rf$ è uniformemente continua. Altrimenti osserviamo che $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta$ t.c. $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon/|r|$, da cui $|rf(x) - rf(y)| < \varepsilon$ come voluto.
<u>Somma</u>) Siano f, g uniformemente continue su I. Abbiamo allora che $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_1, \delta_2$ t.c. $|x - y| < \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ e $|x - y| < \delta_2 \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Sia $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Abbiamo quindi che

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon \implies$$

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| < |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < 2\varepsilon$$

da cui la tesi scegliendo i delta corrispondenti alla metà dell'epsilon voluto. □

Proposizione 12.19.
Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = m$$

essa è uniformemente continua.

Dimostrazione. Dalla definizione di limite abbiamo che $\forall\varepsilon > 0$ $\exists R_+ > 0, R_- > 0$ tali che $\forall x > R_+$ $|f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\forall x < -R_-$ $|f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia $R = \max\{R_+, R_-, 1\}$.

Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta \in (0, 1)$ la costante garantita dalla continuità uniforme di f su $[-R - 1, R + 1]$. Siano quindi $x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $|x - y| < \delta$. Consideriamo le seguenti possibilità:

- $(x, y > R)$ Abbiamo $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
- $(x, y < -R)$ Analogamente al caso precedente $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- $(x \in [-R, R] \vee y \in [-R, R])$ Senza perdita di generalità ipotizziamo $x \in [-R, R]$. Abbiamo $|x - y| < \delta < 1 \implies x, y \in [-R - 1, R + 1]$ ma allora per la continuità uniforme di f su $[-R - 1, R + 1]$ abbiamo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Osserviamo che, dato che $R > 1$, non è possibile che $x < -R \wedge y > R$ o viceversa, quindi abbiamo esaurito le possibilità. Allora $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, quindi f è uniformemente continua su $\mathbb{R}$. □

Corollario 12.20.
Data $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua t.c.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - f_0(x)) = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - f_0(x)) = 0$$

allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente $f - f_0$ è una funzione uniformemente continua e quindi, dato che $f = f_0 + (f - f_0)$ e che la somma di funzioni uniformemente continue è uniformemente continua, abbiamo la tesi. □

12.2.1 Moduli di Continuità

Proviamo a generalizzare il concetto di funzioni Lipschitziane

Definizione 12.21 (Modulo di Continuità)**.**
Date $f : C \to \mathbb{R}$ con $C \subseteq \mathbb{R}$ e $\omega : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ affermiamo che ω è un *modulo di continuità* (MdC) per f se

1. $\omega(0) = 0$, ω debolmente crescente, $\lim\limits_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$
2. $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$.

Osserviamo che le funzioni $L-$lipschitziane sono tutte e sole quelle che hanno MdC $\omega(t) = Lt$. Una classe più ampia sono le funzioni Hölderiane, che hanno MdC $\omega(t) = Lt^\alpha$ con $\alpha \in [0, 1]$, $L > 0$.

Proposizione 12.22.
Data $f : C \to \mathbb{R}$ con $C \neq \emptyset$ abbiamo che f è uniformemente continua se e solo se ammette Modulo di Continuità.

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) Definiamo

$$\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in C, |x - y| \leq t\}.$$

Osserviamo che ω_f è un MdC per f:

1. $\omega_f(t) \geq 0$ perché è definito come supremo di quantità positive.
2. $\omega_f(0) = \sup\{|f(x) - f(x)| = 0\} = 0$. ω_f è monotona per la monotonia del supremo al crescere dell'insieme.
3. $\forall \varepsilon > 0$ sia δ il valore garantito dalla continuità uniforme di f. Se $t < \delta$ e $|x - y| < t$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, quindi $\omega_f(t) < \varepsilon$ $\forall t < \delta$. Portando $\varepsilon \to 0$ abbiamo $\lim_{t \to 0^+} \omega_f(t) = 0$.
4. Per costruzione $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$.

$\Longleftarrow$) Per ipotesi $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$. Dato che $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$ abbiamo che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\omega(t) < \varepsilon$ $\forall t < \delta$. Ponendo $t = |x - y| < \delta$ abbiamo $|f(x) - f(y)| \leq \omega(t) < \varepsilon$, ovvero f è uniformemente continua. □

Definizione 12.23 (MdC ottimale)**.**
Data $f : C \to \mathbb{R}$ uniformemente continua,

$$\omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in C, |x - y| \leq t\}$$

è detto il suo modulo di continuità ottimale.

Proposizione 12.24.
Data $f : [0, +\infty] \to \overline{\mathbb{R}}$ crescente, positiva, infinitesima in 0 e subadditiva, allora $\exists a, b$ t.c. $f(x) \leq ax + b$ $\forall x \geq 0$.

Dimostrazione. Essendo f infinitesima $\exists \delta > 0$ t.c. $f(\delta) \in \mathbb{R}$. Per la subadditività di f abbiamo $f(n\delta) \leq nf(\delta)$. Dato $t \in [0, +\infty)$, per la proprietà archimedea di $\mathbb{R}$ abbiamo che $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n \leq t/\delta \leq n + 1$, ovvero $n\delta \leq t \leq (n + 1)\delta$. Essendo f crescente $f(n\delta) \leq f(t) \leq f((n + 1)\delta)$, da cui

$$f(t) \leq (n + 1)f(\delta) = nf(\delta) + f(\delta) \leq t\frac{f(\delta)}{\delta} + f(\delta).$$

Se $\exists \delta \in [0, +\infty)$ t.c. $f(\delta) \neq 0$ allora ponendo $a = \frac{f(\delta)}{\delta}$ e $b = f(\delta)$ abbiamo la tesi, infatti $a(+\infty) + b = +\infty$ per $a \neq 0$. Se $\forall \delta \in [0, +\infty)$, $f(\delta) = 0$ possiamo scegliere $a \in (0, +\infty)$ e $b = 0$ e soddisfare la tesi. □

Proposizione 12.25.
Se $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo è uniformemente continua e ω_f è il suo modulo di continuità ottimale allora ω_f è subadditivo, ovvero

$$\omega_f(t + s) \leq \omega_f(t) + \omega_f(s).$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\omega_f(s + t) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in I, |x - y| \leq s + t\}$$

Mettiamoci allora nell'ipotesi $|x - y| \leq s + t$. Osserviamo che $\forall z \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$. Ponendo $z = x - t\frac{x-y}{|x-y|}$ abbiamo $z \in I$ e

$$|x - z| = \left|t\frac{x - y}{|x - y|}\right| = t \leq t,$$

$$|z-y| = \left| x-y-t\frac{x-y}{|x-y|} \right| = \left| \frac{x-y}{|x-y|}(|x-y|-t) \right| \leq s$$

Unendo queste informazioni troviamo

$$\begin{aligned}
\omega_f(s+t) \leq & \sup\{|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)| \mid |x-y| \leq s+t\} \leq \\
\leq & \sup\{|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)| \mid |x-z| \leq t, |z-y| \leq s\} \leq \\
\leq & \sup\{|f(x)-f(z)| \mid |x-z| \leq t\} + \sup\{|f(z)-f(y)| \mid |z-y| \leq s\} = \\
= & \omega_f(t)+\omega_f(s).
\end{aligned}$$

□

Corollario 12.26.
Se $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua allora ha una crescita sublineare, questo deriva dal fatto che il modulo di continuità è limitato da una funzione lineare in quanto crescente, positivo, infinitesimo in 0 e subadditivo.

Proposizione 12.27.
Data $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua possiamo estendere f ad una funzione continua su $[0,1]$.

Dimostrazione. La tesi equivale a mostrare che $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ esiste, o equivalentemente $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x_n \to 1^-$ $\lim f(x_n) = \ell$. Data $x_n \to 1^-$ essa è una successione con immagine limitata (perché sublineare) e quindi, a meno di passare a sottosuccessioni, $\exists \ell$ t.c. $f(x_n) \to \ell$. Sia quindi $y_n \to 1^-$ un'altra succesione. Allora

$$f(y_n) = f(x_n) + \underbrace{f(y_n) - f(x_n)}_{\varepsilon(n)}.$$

Per la continuità uniforme, f ammette ω MdC, da cui

$$|\varepsilon(n)| \leq \omega(|y_n - x_n|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Quindi per ogni successione $y_n \to 1^-$ abbiamo $f(y_n) = f(x_n) + o(1) \to \ell$. □

12.3 Integrabilità per le funzioni Continue

Teorema 12.28.
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è Continua allora è integrabile.

Dimostrazione alla Carminati. Se è continua è limitata sull'intervallo perché $[a,b]$ è compatto. Per Heine Cantor f è uniformemente continua. Sia $\pi = \{t_0, \cdots, t_n\}$ una suddivisione di $[a,b]$ e poniamo $\delta = \max\{t_k - t_{k-1} \mid k \in \mathbb{N}_n\}$ il parametro di finezza di π. Essendo f limitata su $[a,b]$, lo è anche su ogni I_k e quindi su questi il supremo coincide con il massimo e l'infimo col minimo. Quindi $\sup_{I_k} f = f(\xi_k)$ e $\inf_{I_k} f = f(\eta_k)$ per qualche $\xi_k, \eta_k \in I_k$.

$$S(f,\pi) = \sum |I_k| \sup_{I_k} f = \sum |I_k| f(\xi_k), \quad s(f,\pi) = \sum |I_k| \inf_{I_k} f = \sum |I_k| f(\eta_k)$$

Per la continuità uniforme di f, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $|\xi_k - \eta_k| < \delta \implies |f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \varepsilon$. Scegliamo quindi un appropriato parametro di finezza:

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum |I_k|(f(\xi_k) - f(\eta_k)) \leq \sum |I_k| \varepsilon = \varepsilon(b-a)$$

Quindi per $\varepsilon \to 0$ abbiamo $S(f,\pi) - s(f,\pi) \to 0$, da cui f è integrabile per la proposizione 12.12. □

Dimostrazione alla Carminati 2. f continua è limitata e uniformemente continua, quindi ammette un modulo di continuità ω. Sia π una suddivisione di $[a,b]$ e δ_π il suo parametro di finezza. Abbiamo, scegliendo $\xi_k, \eta_k \in I_k$ t.c. $f(\xi_k) = \sup_{I_k} f$ e $f(\eta_k) = \inf_{I_k} f$

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|(f(\xi_k) - f(\eta_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} |I_k| \omega(|I_k|) \leq (b-a)\omega(\delta_\pi).$$

Per $\delta_\pi \to 0$, per definizione di MdC $\omega(\delta_\pi) \to 0$, da cui la tesi. □

Dimostrazione alla Novaga. Dalla continuità f è limitata e uniformemente continua per Heine Cantor. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ e prendiamo $\pi = \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}_n \cup \{0\}}$ una suddivisione uniforme ($t_k = a + k\frac{b-a}{n}$).

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\max_{I_k} f - \min_{I_k} f \right)$$

Dalla continuità uniforme $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n$ t.c. $|x - y| < \frac{b-a}{n} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Fissiamo allora ε e prendiamo un n appropriato:

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \frac{b-a}{n}(n\varepsilon) = (b-a)\varepsilon.$$

Abbiamo quindi la convergenza per la proposizione 12.12. □

Osservazione 12.29.
Queste dimostrazioni funzionano anche per $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua limitata ($|f(x)| \leq C$).

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\pi = \{t_0, \cdots, t_{n+2}\}$ t.c. $t_0 = a$, $t_1 = a + \varepsilon$, $t_{k+1} - t_k = \frac{b-a-2\varepsilon}{n}$, $t_{n+1} = b - \varepsilon$, $t_{n+2} = b$, ovvero una suddivisione uniforme al centro con due intervalli di ampiezza ε ai lati.

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq 4C\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a-2\varepsilon}{n} \left(\sup_{(t_k, t_{k+1})} f - \inf_{(t_k, t_{k+1})} f \right)$$

Dove $4C\varepsilon$ deriva dalle ampiezze degli estremi per i massimi valori di $\sup_{(a,a+\varepsilon)} f$, $\sup_{(b-\varepsilon,b)} f$, $\inf_{(a,a+\varepsilon)} f$, e $\inf_{(b-\varepsilon,b)} f$. Dalla continuità uniforme $\exists n$ t.c.

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq 4C\varepsilon + (b-a)\varepsilon$$

da cui l'integrabilità. □

Osservazione 12.30.
Con un metodo analogo troviamo che $f : I \to \mathbb{R}$ limitata con $\operatorname{disc}(f)$ finito è integrabile.

Teorema 12.31.
$f : I \to \mathbb{R}$ limitata con $\operatorname{disc}(f)$ finito o numerabile è integrabile.

La formulazione più generale di questo teorema è come segue:

Definizione 12.32 (Trascurabile)**.**
Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è *trascurabile* o di misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $I_n \subseteq \mathbb{R}$ intervalli t.c.

$$E \subseteq \bigcup_n I_n, \qquad \sum_n |I_n| \leq \varepsilon.$$

Teorema 12.33 (Vitali-Lebesgue)**.**
$f : I \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile se e solo se $\operatorname{disc}(f)$ è trascurabile.

12.3.1 Proprietà degli integrali

Teorema 12.34 (Media integrale)**.**
Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\exists \xi \in [a,b]$ t.c.

$$f(\xi) = \fint_a^b f(x)dx \doteq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \iff (b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazione. Abbiamo osservato

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a)\max_{[a,b]} f \implies \min_{[a,b]} f \leq \fint_a^b f \leq \max_{[a,b]} f$$

Per il teorema dei valori intermedi $\exists \xi \in [a,b]$ t.c. $f(\xi) = \fint_a^b f$. □

Osservazione 12.35.
La continuità è necessaria, per esempio l'integrale di $\frac{x}{|x|}$ su $[-1,1]$ vale 0 ma la funzione non assume il valore 0.

Per semplificare la notazione scriveremo $\mathcal{R}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ integrabili}\}$.

Osservazione 12.36.
$f, g \in \mathcal{R}(I)$ con $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I$ allora $\int_I f \leq \int_I g$

Proposizione 12.37.
$f \in \mathcal{R}(I) \implies |f| \in \mathcal{R}(I)$ e $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

Dimostrazione. Siano ε, π t.c. $S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon$. Dato che $\forall a, b$ $|a-b| \geq ||a|-|b||$ abbiamo

$$\sup_{(t_k,t_{k+1})} f - \inf_{(t_k,t_{k+1})} f \geq \sup_{(t_k,t_{k+1})} |f| - \inf_{(t_k,t_{k+1})} |f|$$
$$\implies S(|f|,\pi) - s(|f|,\pi) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \varepsilon$$

da cui $|f| \in \mathcal{R}(I)$. Osserviamo inoltre che $-|f| \leq f \leq |f|$, quindi

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f| \iff \left|\int f\right| \leq \int |f|.$$

□

Proposizione 12.38 (Linearità dell'integrale)**.**
Date $f, g \in \mathcal{R}(I)$ abbiamo

$$(1) \forall c \in \mathbb{R} \quad c \cdot f \in \mathcal{R}(I) \quad \text{e} \quad \int_I cf\, dx = c\int_I f\, dx$$
$$(2) f + g \in \mathcal{R}(I) \quad \int f + g\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx$$

In particolare $\mathcal{R}(I)$ è uno spazio vettoriale e $f \mapsto \int_I f\, dx$ è lineare su $\mathcal{R}(I)$.

Dimostrazione. (1) Supponiamo $c \geq 0$. Osserviamo che $\forall \pi$

$$S(cf,\pi) = cS(f,\pi) \quad s(cf,\pi) = cs(f,\pi),$$

da cui

$$\sup_\pi s(cf,\pi) = c\sup_\pi s(f,\pi) = c\inf_\pi S(f,\pi) = \inf_\pi S(cf,\pi) = c\int_I f\, dx.$$

Copriamo anche gli scalari negativi mostrando che $-f \in \mathcal{R}(I)$.

$$S(-f,\pi) = -s(f,\pi) \quad s(-f,\pi) = -S(f,\pi) \implies$$
$$\sup_\pi s(-f,\pi) = \inf_\pi S(-f,\pi) = -\int_I f\, dx.$$

(2) Proviamo a relazionare le somme superiori di $f+g$ con quelle di f e di g:

$$S(f+g,\pi) = \sum_k (t_{k+1}-t_k) \sup_{(t_k,t_{k+1})} (f+g) \leq$$
$$\leq \sum_k (t_{k+1}-t_k)(\sup f + \sup g) = S(f,\pi) + S(g,\pi).$$

Analogamente $s(f+g,\pi) \geq s(f,\pi) + s(g,\pi)$.
Osserviamo ora che $\sup_{\pi_1} s(f,\pi_1) + \sup_{\pi_2} s(g,\pi_2) = \sup_\pi (s(f,\pi) + s(g,\pi))$:
Date π_1 e π_2 partizioni, $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ è una partizione tale che

$$s(f,\pi_1) + s(g,\pi_2) \leq s(f,\pi) + s(g,\pi),$$

mentre data π, ponendo $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ abbiamo

$$s(f,\pi_1) + s(g,\pi_2) \geq s(f,\pi) + s(g,\pi),$$

da cui la tesi passando agli estremi superiori. In modo del tutto analogo troviamo $\inf_{\pi_1} S(f,\pi_1) + \inf_{\pi_2} S(g,\pi_2) = \inf_\pi (S(f,\pi) + S(g,\pi))$.

La tesi segue quindi dalla seguente catena di disuguaglianze:

$$\int f + \int g = \sup s(f,\pi) + \sup s(g,\pi) = \sup(s(f,\pi) + s(g,\pi)) \leq$$
$$\leq \underbrace{\sup s(f+g,\pi)}_{=s(f+g)} \leq \underbrace{\inf S(f+g,\pi)}_{=S(f+g)} \leq \inf S(f,\pi) + \inf S(g,\pi) = \int f + \int g.$$

□

Proposizione 12.39 (Additività rispetto al dominio)**.**
Sia $I = I_1 \sqcup I_2$, $f \in \mathcal{R}(I)$, allora $f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1)$, $f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2)$ e

$$\int_I f\ dx = \int_{I_1} f\ dx + \int_{I_2} f\ dx.$$

Dimostrazione. Siano

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I_1 \\ 0 & x \in I_2 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in I_1 \\ f(x) & x \in I_2 \end{cases} \implies f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Supponiamo senza perdita di generalità $x \le y\ \forall x \in I_1, y \in I_2$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia π una suddivisione di I t.c. $S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon$ e $\sup I_1 = \inf I_2 \in \pi$. Poniamo $\pi_1 = \pi|_{I_1}$ suddivisione di I_1 e $\pi_2 = \pi|_{I_2}$ suddivisione di I_2. Osserviamo che

$$0 \le S(f|_{I_1},\pi_1) - s(f|_{I_1},\pi_1) = \sum_{k=1}^{|\pi_1|}(t_k - t_{k-1})\left(\sup_{[t_{k-1},t_k]} f - \inf_{[t_{k-1},t_k]} f\right) \le$$

$$\sum_{k=1}^{|\pi|}(t_k - t_{k-1})\left(\sup_{[t_{k-1},t_k]} f - \inf_{[t_{k-1},t_k]} f\right) = S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon$$

e che analogamente

$$0 \le S(f|_{I_2},\pi_2) - s(f|_{I_2},\pi_2) \le S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon$$

quindi $f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1)$ e $f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2)$. Abbiamo anche che

$$S(f_1,\pi) = S(f|_{I_1},\pi_1) = \int_{I_1} f = s(f|_{I_1},\pi_1) = s(f_1,\pi)$$

$$S(f_2,\pi) = S(f|_{I_2},\pi_2) = \int_{I_2} f = s(f|_{I_2},\pi_2) = s(f_2,\pi)$$

da cui $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(I)$ con $\int_I f_1 = \int_{I_1} f$ e $\int_I f_2 = \int_{I_2} f$.

Per la linearità dell'integrale abbiamo quindi la tesi:

$$\int_I f = \int_I (f_1 + f_2) = \int_I f_1 + \int_I f_2 = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

□

Osserviamo che la proposizione precedente può essere riformulata prendendo $a < b < c \in \mathbb{R}$ nel seguente modo

$$\int_a^b f\ dx + \int_b^c f\ dx = \int_a^c f\ dx.$$

Per convenzione poniamo

$$\int_a^a f = 0, \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f \text{ se } a > b$$

in modo che la scrittura precedente valga $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

12.4 Primitive e Teorema fondamentale del Calcolo

Nel capitolo precedente abbiamo definito la derivata, proviamo quindi a definite una operazione inversa.

Definizione 12.40 (Primitiva)**.**
Date $f : I \to \mathbb{R}$ integrabile con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile, se $F' = f$ allora F è una primitiva di f.

Osservazione 12.41.
Se F_1 e F_2 sono primitive di f allora $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$, quindi $F_1 = F_2 + C$ per qualche $C \in \mathbb{R}$.

Osserviamo una interessante correlazione tra le primitive e gli integrali

Teorema 12.42.
Data $f : I \to \mathbb{R}$ continua con I intervallo chiuso e preso $x_0 \in I$ sia $\forall x \in I$ $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Allora F_{x_0} è una primitiva di f, ovvero F_{x_0} è derivabile e $F'_{x_0} = f$.

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata in x

$$F'_{x_0}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Per il teorema di media integrale 12.34 $\exists \xi \in (x - |h|, x + |h|) \cap I$ t.c. $\int_x^{x+h} f(t)dt = (x + h - x)f(\xi)$, quindi

$$F'_{x_0}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} f(\xi) = f(x).$$

□

Possiamo riformulare quanto detto come segue

Teorema 12.43 (Fondamentale del Calcolo integrale)**.**
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ integrabile con I intervallo, allora presi $a, b \in I$ con $a < b$ abbiamo

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Dimostrazione. Preso $x_0 \in I$, sappiamo che F_{x_0} è una primitiva di f, e quindi se F è una qualsiasi primitiva di f abbiamo $F_{x_0}(x) = F(x) + C_{x_0}$ per qualche costante C_{x_0}.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)dt = -F_{x_0}(a) + F_{x_0}(b) =$$
$$= F(b) + \cancel{C_{x_0}} - F(a) - \cancel{C_{x_0}} = F(b) - F(a).$$

□

Definizione 12.44 (Integrale indefinito)**.**
Definiamo l'integrale indefinito di f come

$$\int f \; dx = \{F : I \to \mathbb{R}, F' = f\}.$$

Per comodità useremo questo simbolo per indicare una generica primitiva di f. Nel caso sia necessario evidenzieremo la costante che separa le primitive con una C maiuscola come segue

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

12.4.1 Calcolo delle primitive

Per integrare una funzione è sufficiente trovarne una primitiva, ovvero un'antiderivata. Purtroppo a volte non è possibile trovare un'espressione per le primitive di funzioni elementari in termini di funzioni elementari. Questo è il caso di

$$e^{x^2}, e^{-x^2}, \frac{e^x}{x}, \frac{\sin x}{x}, \dots$$

Possiamo cominciare la nostra ricerca ribaltando le derivate di funzioni elementari, trovando quanto segue[1]

$F(x)$	$F'(x)$
C	0
x^a	ax^{a-1}
$\log\|x\|$	$\frac{1}{x}$
e^{ax}	ae^{ax}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	C
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\| + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$

[1] Ricordiamo che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, da cui l'identità

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

Questa tabella non è esaustiva, ma un altro modo per arricchire la nostra collezione di funzioni per le quali possiamo trovare un'antiderivata è riprendere le regole di derivazione e leggerle come regole di integrazione.

Le regole di derivazione principali sono

$$(F \pm G)' = F' \pm G', \quad (FG)' = F'G + FG', \quad (F \circ G)' = (F' \circ G)G',$$

da cui ricaviamo nuovamente che l'integrale rispetta la somma e due nuove proprietà: l'integrazione per parti e per sostituzione.

Proposizione 12.45 (Integrazione per Parti)**.**

$$\int F'G = FG - \int FG'$$

Integrando con gli estremi abbiamo

$$\int_a^b F'G = FG|_a^b - \int_a^b FG' = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b FG'.$$

Proposizione 12.46 (Integrazione per Sostituzione)**.**

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = \int F'(y)dy\Big|_{y=g(x)}$$

Integrando con gli estremi abbiamo

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

Con questi strumenti possiamo ricavare l'integrale di diverse funzioni interessanti. Seguono alcuni esempi.

Osservazione 12.47 (Esempi di integrali)**.**

1. $$\int \log(x)dx = \int \log(x) \cdot 1dx = x\log(x) - \int \frac{1}{x}xdx = x\log(x) - x + C.$$

2. $$\int \sin(x)^2dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x)^2dx = -\sin(x)\cos(x)+$$
$$+\int 1dx - \int \sin(x)^2dx \implies \int \sin(x)^2dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C.$$

3. $$\int \cos(x)^2dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C.$$

4. Sia $p \in \mathbb{R}[x]$
$$\int e^x p(x)dx = e^x p(x) - \int e^x p'(x)dx = \cdots = e^x \sum_{i=0}^{\deg(p)+1} (-1)^i p^{(i)}(x) + C.$$
$$\int \sin(x)p(x)dx = -\cos(x)p(x) + \sin(x)p'(x) - \int \sin(x)p''(x)dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \deg(p)/2 \rfloor} (-1)^i(-\cos(x)p^{(i)}(x) + \sin(x)p^{(i+1)}(x)) + C.$$

5. $$\int F(e^x)e^xdx = \int F(y)dy\Big|_{y=e^x}.$$

6. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{y}dy\Big|_{y=f(x)} = \log|f(x)| + C.$$

7.
$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{\cos(x)'}{\cos(x)}dx = -\log|\cos(x)| + C.$$

8.
$$\int \arctan(x)dx = \int \arctan(x)\cdot 1dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$$
$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + C.$$

Integrazione delle funzioni razionali

Sviluppiamo adesso un metodo per integrare le funzioni Razionali e classi a loro correlate.

Una funzione razionale ricordiamo è della forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ con } p, q \in \mathbb{R}[x].$$

Procediamo per passi. In primo luogo fattorizziamo q in irriducibili

$$q(x) = k\prod_{i=1}^{n} q_i(x)^{\alpha_i} \quad \text{con } q_i \text{ monici.}$$

Successivamente dividiamo p per q ottenendo p_1 con resto p_2, ovvero

$$\frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q} \quad \deg(p_2) < \deg q.$$

Separiamo quindi il secondo addendo in modo tale che sia somma di funzioni razionali con denominatore potenza di un irriducibile

$$\frac{p_2}{q} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{p_{ij}}{q_i^j} \quad \deg p_{ij} < \deg q_i.$$

Abbiamo quindi due casi: q_i lineare o q_i quadratico.

Se q_i è lineare p_{ij} è una costante, quindi l'integrale per quell'addendo è della forma

$$p_{ij}\int \frac{1}{(x+a)^j}dx = \begin{cases} p_{ij}\log|x+a| & j=1 \\ -\frac{p_{ij}}{j-1}\frac{1}{(x+a)^{j-1}} & j>1 \end{cases}.$$

Se q_i è quadratico abbiamo $q = x^2 + ax + b$ e

$$p_{ij} = r_1x + r_2 = \frac{r_1}{2}(2x+a) + r_2 - a\frac{r_1}{2} = \frac{r_1}{2}\left(q_i' + \left(\frac{2r_2}{r_1} - a\right)\right).$$

Abbiamo allora che l'integrale dell'addendo è della forma

$$\int \frac{p_{ij}}{q_i^j}dx = \frac{r_1}{2}\int \frac{q_i'}{q_i^j}dx + \left(r_2 - a\frac{r_1}{2}\right)\int \frac{1}{q_i^j}dx.$$

Il primo è della forma già vista

$$\int \frac{q_i'}{q_i^j}dx = \int \frac{1}{y^j}dy\Big|_{y=q_i} = \begin{cases} \log|q_i| & j=1 \\ -\frac{1}{j-1}\frac{1}{q_i^{j-1}} & j>1 \end{cases},$$

mentre per il secondo dobbiamo manipolare il polinomio ulteriormente. Osservando che $\Delta = a^2 - 4b < 0$ abbiamo

$$q_1 = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = -\frac{\Delta}{4}\left(\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{-\Delta/4}}\right)^2 + 1\right).$$

Sia allora $y = \frac{x+a/2}{\sqrt{-\Delta}}$, da cui $p_i = -\Delta/4(y^2+1)$. Quindi abbiamo

$$\int \frac{1}{q_i^j}dx = \sqrt{-\Delta}\left(\frac{4}{-\Delta}\right)^j\int \frac{1}{(y^2+1)^j}dy.$$

Se $j = 1$ abbiamo

$$\int \frac{1}{y^2+1} dy = \arctan(y) + C = \arctan\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C,$$

altrimenti ($j > 1$), abbassiamo il grado integrando per parti:

$$\begin{aligned}
I_j = \int \frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^j} dy &= \int \frac{1}{(y^2+1)^{j-1}} dy - \frac{1}{2}\int \frac{2y \cdot y}{(y^2+1)^j} dy = \\
&= I_{j-1} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{j-1}\frac{y}{(y^2+1)^{j-1}} - \int -\frac{1}{j-1}\frac{1}{(y^2+1)^{j-1}} dy\right) = \\
&= I_{j-1} + \frac{1}{2(j-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{j-1}} - \frac{1}{2(j-1)} I_{j-1} = \\
&= \frac{1}{2(j-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{j-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(j-1)}\right) I_{j-1} = \\
= \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{1}{2(j-i)}\frac{y}{(y^2+1)^{j-i}}\right)\prod_{k=1}^{i-2}\frac{2(j-k)-1}{2(j-k)} &+ \int \frac{1}{y^2+1} dy \prod_{k=1}^{j-1}\frac{2(j-k)-1}{2(j-k)} = \\
= \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{1}{2(j-i)}\frac{y}{(y^2+1)^{j-i}}\right)\prod_{k=1}^{i-2}\frac{2(j-k)-1}{2(j-k)} &+ \arctan(y)\prod_{k=1}^{j-1}\frac{2(j-k)-1}{2(j-k)} + C.
\end{aligned}$$

La formula vale ponendo che le somme con indice superiore minore di quello inferiore sono nulle e che i prodotti con un simile indice valgono 1. Una conseguenza interessante è che con questa accortezza la formula vale anche per $j = 1$. Possiamo quindi concludere che l'integrale del secondo addendo è della forma seguente:

$$\int \frac{1}{q_i^j} dx = \frac{4^j}{-\Delta}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{1}{2(j-i)}\frac{x+a/2}{(x+a/2)^2-\Delta)^{j-i}}\right)\prod_{k=1}^{i-2}\frac{2(j-k)-1}{2(j-k)} +$$

$$+\sqrt{-\Delta}\left(\frac{4}{-\Delta}\right)^j \arctan\left(\frac{x+a/2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\prod_{k=1}^{j-1}\frac{2(j-k)-1}{2(j-k)} + C.$$

Questo esaurisce i casi e quindi possiamo integrare tutte le funzioni razionali.

Osservazione 12.48.
Se abbiamo integrali del tipo

$$\int p(x)\log(q(x))dx \quad \text{o} \quad \int p(x)\arctan(q(x))dx, \text{ con } p, q \in \mathbb{R}[x],$$

allora integrando per parti ci riconduciamo al caso di funzioni razionali.

Osservazione 12.49.
In alcuni casi possiamo ricondurre un integrale all'integrale di una funzione razionale facendo delle sostituzioni. Sia allora $r(x) \in \mathbb{R}(x)$ una generica funzione razionale.

1. $$\int r(e^x)dx = \int \frac{r(e^x)}{e^x} e^x dx = \int \frac{r(y)}{y} dy\bigg|_{y=e^x}.$$

2. $$\int r(\sin x, \cos x)dx = 2\int r\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{1}{1+y^2} dy\bigg|_{y=\tan(x/2)}.$$

3. $$\int r\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad \text{sostituisci con } y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

4. $$\int r(x, \sqrt{a^2-x^2})dx = \int r(a\sin t, a\cos t)a\cos t\ dt\bigg|_{t=\arcsin(x/a)} =$$
$$= \int r\left(a\frac{2y}{1+y^2}, a\frac{1-y^2}{1+y^2}\right) a\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\ dy\bigg|_{y=\tan(\arcsin(x/a)/2)}$$

5.
$$\int r(x, \sqrt{x^2+c})dx = \int r\left(\frac{-y^2+c}{2y}, \frac{y^2+c}{2y}\right)\left(-\frac{y^2+c}{2y^2}\right)dy\Big|_{y=-x+\sqrt{x^2+c}}$$

Equivalentemente possiamo sostituire $x = \sqrt{c}\sinh t$ se $c > 0$ o $x = \sqrt{-c}\cosh t$ se $c < 0$ e ottenere un integrale di una razionale valutata in e^t e a quel punto sostituire nuovamente.

12.4.2 Formula di Taylor con resto integrale

Abbiamo visto il resto di Peano 11.63 e il resto di Lagrange 11.68 per le espansioni di Taylor, ma entrambi non ci danno una espressione esplicita per il resto. Con gli strumenti del calcolo integrale invece possiamo:

Proposizione 12.50.
Se f è derivabile n volte e $f^{(n)}$ è integrabile allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt}_{R_n}.$$

R_n è detto il *resto integrale* della espansione di Taylor di f in x_0.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.
$n = 1$)

$$f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \cancel{f(x_0)} + f(x) - \cancel{f(x_0)} = f(x).$$

$n > 1$) Osservando che

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{(x-t)^n}{n!}\right) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

sviluppiamo R_n con l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} R_n &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \\ &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \\ &= f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_{n+1}. \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva $f(x) = T_{n-1}(x) + R_n$, da cui

$$f(x) = T_{n-1}(x) + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_{n+1} = T_n(x) + R_{n+1}.$$

□

Confrontiamo questo risultato con il resto di Lagrange. Per 11.68 abbiamo che $\exists \xi \in (x_0, x)$ tale che

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

$$f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\, \underbrace{n\frac{(x-t)^{n-1}}{(x-x_0)^n}}_{\doteqdot P_n(t)} dt.$$

Osserviamo che $P_n(t) \geq 0$ e che $\displaystyle\int_{x_0}^{x} P_n(t)dt = 1$, quindi $f^{(n)}(\xi)$ è una sorta di media pesata delle derivate $n-$esime di f.

Osservazione 12.51.
Se $f^{(n)}$ è continua posso dimostrare il teorema di Lagrange 11.68 a partire dall'espansione con resto integrale.

Dimostrazione. Siano $M_n = \max_{[x_0,x]} f^{(n)}$ e $m_n = \min_{[x_0,x]} f^{(n)}$, da cui

$$m_n = \int_{x_0}^{x} m_n P(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)P_n(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} M_n P_n(t)dt = M_n.$$

Essendo $f^{(n)}$ continua, per il teorema dei valori intermedi $\exists \xi \in [x_0, x]$ tale che

$$f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)P_n(t)dt,$$

da cui la tesi. □

12.5 Integrali impropri

Proviamo a generalizzare la definizione di integrale al caso di intervalli generici.

Definizione 12.52 (Integrabile (impropriamente))**.**
Data $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ integrabile su $[a, c]$ $\forall a < c < b$ allora essa è integrabile (in senso esteso/in modo improprio) su $[a, b)$ se esiste

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx \doteq \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Analogamente definiamo l'integrabilità su $(a, b]$ per $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

In generale affermiamo che $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ è integrabile (in senso esteso) se, dato $x_0 \in (a, b)$, f è integrabile su $(a, x_0]$ e $[x_0, b)$. Poniamo

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f.$$

Per il calcolo di questi integrali possiamo prendere ispirazione dai criteri di convergenza che abbiamo definito per le serie.

Teorema 12.53 (Confronto)**.**
Date $f, g : [x_0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tali che $f, g \in \mathcal{R}([x_0, n])$ $\forall x_0 < n \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$f \leq g \text{ e } g \text{ integrabile su } [x_0, +\infty) \implies f \text{ integrabile su } [x_0, +\infty).$$

Dimostrazione. Abbiamo $0 \leq f \leq g$ e g integrabile su $[x_0, +\infty)$, segue allora $\forall n > x_0$

$$0 \leq \int_{x_0}^{n} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{n} g(x)dx.$$

Portando al limite (a priori superiore, dato che non sappiamo se l'integrale converge)

$$0 \leq \limsup_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{n} f(x)dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g \in \mathbb{R}.$$

Essendo f positiva, $n \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{n} f$ è crescente, ma limitata dall'integrale di g, quindi ammette limite

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{n} f = \int_{x_0}^{+\infty} f \leq \int_{x_0}^{+\infty} g.$$

□

Corollario 12.54 (Confronto Asintotico)**.**
Date f, g definitivamente positive per $x \to +\infty$, se $f \sim g$ allora

$$f \text{ integrabile su } [x_0, +\infty) \iff g \text{ integrabile su } [x_0, +\infty).$$

Dimostrazione. Supponiamo f integrabile. $g = f + o(f) = f(1 + o(1))$, quindi definitivamente $g < 2f$. Essendo f integrabile, per linearità del limite, anche $2f$ è integrabile, quindi per confronto anche g lo è. L'argomento è simmetrico per l'altra implicazione. □

Osservazione 12.55.
$f \geq 0$ non integrabile su $[x_0, +\infty) \iff \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{n} f = +\infty$, infatti la funzione in n dell'integrale è monotona crescente.

Sempre ispirandosi alle serie possiamo definire una integrabilità assoluta:

Definizione 12.56 (Assulutamente integrabile)**.**
Data $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo anche illimitato affermiamo che f è assolutamente integrabile su I se $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $\forall [a,b] \subseteq I$ intervalli chiusi limitati e $|f|$ è integrabile (in senso esteso) su I.

Teorema 12.57.
Se $f : I \to \mathbb{R}$ è assolutamente integrabile su I allora è integrabile su I.

Dimostrazione. Definiamo

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max(f(x), 0) \text{ la parte positiva di } f \text{ e} \\ f^-(x) &= -\min(f(x), 0) \text{ la parte negativa di } f. \end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x),$$

in particolare $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$. Per confronto con $|f|$ allora f^+, f^- sono integrabili su I. Per additività del limite f è integrabile e

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

□

Osservazione 12.58.
Se $|f|$ è integrabile su I allora abbiamo

$$\left|\int_I f\right| = \left|\int_I f^+ - \int_I f^-\right| \leq \int_I f^+ + \int_I f^- = \int_I |f|.$$

Concludiamo il paragone con le serie mostrando che la convergenza delle serie è legata a quella degli integrali

Osservazione 12.59.
Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = f(n)$ per una qualche $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ non negativa, infinitesima e decrescente. Allora abbiamo

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

Equivalentemente abbiamo

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N} f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{N} f(n) \qquad \forall N \geq 2$$

Proposizione 12.60.
Data $f \geq 0$ decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

Dimostrazione. La tesi segue per confronto dalla disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{+\infty} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - f(1)$$

□

Osservazione 12.61.
Il primo termine limita lo scarto tra la serie e l'integrale.

Consideriamo allora la successione

$$b_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x)dx \in [0, f(1)].$$

La successione è limitata e

$$b_{N+1} - b_N = f(N+1) - \int_N^{N+1} f(x)dx \leq 0,$$

ovvero b_N è decrescente.

Essendo b_n monotona e limitata ammette limite $b \in [0, f(1)]$, quindi abbiamo

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)dx + b + o(1) \quad \text{per } N \to +\infty.$$

Corollario 12.62.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \int_1^N \frac{1}{x}dx + \gamma + o(1) = \log(N) + \gamma + o(1)$$

con $\gamma \in [0, 1]$, la quale viene chiamata *costante di Eulero Mascheroni* ed è possibile trovare che $\gamma \approx 0.577$.

12.5.1 La funzione Gamma

Consideriamo gli integrali della forma

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt$$

con $m \in \mathbb{N}$. Calcoliamone il valore per induzione:
$m = 0$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^t\Big|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1.$$

$m > 0$) procediamo per parti derivando t^m e integrando e^{-t}:

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt = \cancelto{0}{t^m(-e^{-t})\Big|_0^{+\infty}} - \int_0^{+\infty} -mt^{m-1}e^{-t} dt = m \int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t} dt.$$

Questa formula per ricorsione definisce i fattoriali, quindi troviamo il curioso risultato che

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt = m!.$$

Generalizziamo il problema studiando la convergenza della seguente classe di integrali impropri

Proposizione 12.63.
L'integrale improprio

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^\alpha \left(\log \frac{1}{x}\right)^\beta dx$$

converge se e solo se $\alpha > -1$ e $\beta > -1$.

Dimostrazione. Sostituendo $t = -\log x$ abbiamo

$$\int_0^1 x^\alpha \left(\log \frac{1}{x}\right)^\beta dx = \int_0^{+\infty} t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt$$

Osserviamo che gli unici punti critici del dominio di integrazione sono solo 0 e $+\infty$, quindi possiamo studiare separatamente l'integrabilità su $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.
($\star$) Per $t \to 0$ abbiamo che $e^{-(\alpha+1)t} = 1 - (\alpha + 1)t + o(t)$, quindi per confronto asintotico la convergenza di $\int_0^1 t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt$ e $\int_0^1 t^\beta - (\alpha + 1)t^{\beta+1} dt$ sono equivalenti.

$$\int_0^1 t^\beta - (\alpha + 1)t^{\beta+1} dt = \int_0^1 t^\beta dt - (\alpha + 1) \int_0^1 t^{\beta+1} dt =$$

$$= \frac{1}{\beta+1} - \frac{\alpha+1}{\beta+2} + \lim_{x\to 0} \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} - (\alpha+1)\frac{x^{\beta+2}}{\beta+2}$$

Il limite converge per $\beta + 1 > 0$, quindi ricaviamo la condizione $\beta > -1$.
($\star$) Chiaramente se $\alpha + 1 \leq 0$ l'integrale non può convergere dato che l'argomento non è monotono crescente. Consideriamo allora $\alpha + 1 > 0$. Sia $\mathbb{N} \ni m \geq \beta$. Essendo gli argomenti positivi

$$\int_1^{+\infty} t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt \leq \int_0^{+\infty} t^m e^{-(\alpha+1)t} dt \overset{y=(\alpha+1)t}{=}$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)^{m+1}} \int_0^{+\infty} y^m e^{-y} dy = \frac{m!}{(\alpha+1)^{m+1}}.$$

Quindi per $\alpha > -1$ l'integrale converge.

Riassumendo, $I(\alpha, \beta)$ converge se e solo se $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. □

Questi risultati ci portano alla seguente definizione

Definizione 12.64 (Gamma di Eulero)**.**
Definiamo la funzione Gamma di Eulero come segue

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Osservazione 12.65.
La funzione è ben definita per $x > 0$ applicando la proposizione precedente. Inoltre integrando per parti osserviamo che $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, infatti restringendoci ai naturali troviamo l'integrale con il quale abbiamo introdotto la sezione: $\Gamma(n) = (n-1)!$. Osserviamo infine che $\Gamma \in C^\infty$.

Proposizione 12.66.
Posto $\Gamma_m(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\log t|^m \, t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Γ_m è assolutamente integrabile $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall x > 0$.
- $\Gamma_m(x+h) = \Gamma_m(x) + h\Gamma_{m+1}(x) + o(h)$ per $h \to 0$.
- $\Gamma'_m(x) = \Gamma_{m+1}(x)$
- $\Gamma_m(x) = (\Gamma_0)^{(m)} = \Gamma^{(m)}$.

Dimostrazione.
($\star$) Separiamo gli integrali in 1

- $\displaystyle\int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^m t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^m t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} y^m e^{-xy} dy$, che converge per $m > -1$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{x+m-1} e^{-t} dt \leq \Gamma(x+m-1)$, che converge per $x + m > -1$.

Entrambe le condizioni sono rispettate per $m \in \mathbb{N}$ e $x > 0$.
($\star$) Fissiamo $x > 0$ e $\delta \in (0, x)$, $|h| \leq \delta$. Sia

$$R(h) = \Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x) - h\Gamma_{m+1}(x),$$

la tesi è equivalente a mostrare $R(h) = o(h)$. Osserviamo che

$$R(h) = \int_0^{+\infty} (\log t)^m t^{x-1} e^{-t} (t^h - 1 - h \log t) dt.$$

Definiamo $g(s) = t^s$. Abbiamo che $g^{(k)}(s) = (\log t)^k t^s$, da cui per lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange 11.68

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2} g''(\xi)$$

$$t^h = 1 + h \log t + \frac{h^2}{2} (\log t)^2 t^\xi \implies t^h - 1 - h \log t = \frac{h^2}{2} (\log t)^2 t^\xi.$$

Essendo un esponenziale, t^s è convessa, quindi

$$\max_{|s|\le\delta} t^s = \max(t^\delta, t^{-\delta}) \le t^\delta + t^{-\delta}.$$

Abbiamo allora

$$t^h - 1 - h\log t \le \frac{h^2}{2}(\log t)^2(t^\delta + t^{-\delta}).$$

Troviamo quindi un limite per $R(h)$

$$|R(h)| \le \frac{h^2}{2}\int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2} t^{x-1} e^{-t}(t^\delta + t^{-\delta})dt = \frac{h^2}{2}(J_+ + J_-),$$

con $J_\pm = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2} t^{x\pm\delta-1} e^{-t}dt$. Per $|\delta| < x$ abbiamo $x \pm \delta - 1 > -1$, quindi i due integrali convergono.

Concludiamo quindi affermando che, per qualche costante $C \ge 0$ abbiamo $|R(h)| \le h^2 C$, da cui $R(h) = o(h)$.

($\star$) Applichiamo la definizione di derivata e il risultato del punto precedente

$$\Gamma'_m(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\Gamma_m(x)} + h\Gamma_{m+1}(x) + o(h) - \cancel{\Gamma_m(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\Gamma_{m+1}(x) + o(1) = \Gamma_{m+1}(x).$$

($\star$) Applicando ricorsivamente il punto precedente abbiamo

$$\Gamma_m(x) = \Gamma_0^{(m)}(x) = \Gamma^{(m)}(x).$$

□

12.6 Curve su spazi reali

12.6.1 Lunghezza del grafico di una funzione

Occupiamoci di un problema apparentemente slegato dagli integrali, ossia la misura della lunghezza di un grafico. Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possiamo stimare la lunghezza del grafico di f suddividendo l'intervallo e approssimando il grafico con tratti rettilinei. Data quindi la partizione $\pi = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_n = b\}$ di $[a, b]$ e indicando con Γ_f il grafico di f definiamo l'approssimazione della lunghezza del grafico data da π come

$$L_\pi(\Gamma_f) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}.$$

Definizione 12.67 (Lunghezza di un grafico)**.**
Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiamo, se converge,

$$L(\Gamma_f) = \sup_\pi L_\pi(\Gamma_f) = \sup_\pi \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}$$

la *lunghezza del grafico* di f su $[a, b]$.
Se $L(\Gamma_f) \in [0, +\infty)$ allora affermiamo che f è *rettificabile*.

Osservazione 12.68.
Se f è $M-$Lipschitziana allora è rettificabile

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L_\pi(\Gamma_f) &= \sum\sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2} \le \\ &\le \sum\sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + M^2(t_k - t_{k-1})^2} = \\ &= \sum(t_k - t_{k-1})\sqrt{1 + M^2} = \sqrt{1 + M^2}(b - a). \end{aligned}$$

□

Proposizione 12.69.
Se $f \in C^1([a,b])$ allora f è rettificabile e

$$L(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Dimostrazione. Data π una partizione di $[a,b]$ abbiamo

$$L_\pi(\Gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}.$$

Per il teorema di Lagrange 11.68 $\exists \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ tale che

$$\begin{aligned} L_\pi(\Gamma_f) =& \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}))^2} = \\ =& \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Definiamo quindi $g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$. Chiaramente g è continua. Posti $m_k = \inf\limits_{[t_{k-1},t_k]} g$ e $M_k = \sup\limits_{[t_{k-1},t_k]} g$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})m_k \leq L_\pi(\Gamma_f) \leq \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})M_k$$
$$s(\pi, g) \leq L_\pi(\Gamma_f) \leq S(\pi, g).$$

Essendo g continua è integrabile, quindi (posti ω_g un modulo di continuità per g e δ_π il parametro di finezza di π) abbiamo

$$\left| L_\pi(\Gamma_f) - \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \right| \leq S(\pi, g) - s(\pi, g) \leq (b-a)\omega_g(\delta_\pi) \to 0.$$

Resta quindi da verificare che $L_\pi(\Gamma_f) \leq \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \doteqdot L$.

Data π abbiamo che $\forall \pi_n$ suddivisione di $[a,b]$ applicando la disuguaglianza triangolare per ogni punto aggiunto troviamo $L_\pi(\Gamma_f) \leq L_{\pi\cup\pi_n}(\Gamma_f)$. Posti $\delta_{\pi\cup\pi_n}$ e δ_{π_n} i parametri di finezza di $\pi \cup \pi_n$ e π_n rispettivamente osserviamo che $\delta_{\pi\cup\pi_n} \leq \delta_{\pi_n}$, da cui, data la monotonia crescente dei Moduli di Continuità, $\omega(\delta_{\pi\cup\pi_n}) \leq \omega_g(\delta_{\pi_n})$. Vale quindi la seguente catena di disuguaglianze:

$$L_\pi(\Gamma_f) \leq L_{\pi\cup\pi_n}(\Gamma_f) \leq L + (b-a)\omega_g(\delta_{\pi\cup\pi_n}) \leq L + (b-a)\omega_g(\delta_{\pi_n}) \to L,$$

da cui $L_\pi(\Gamma_f) \leq L$ come voluto. □

12.6.2 Caso generale

Definizione 12.70 (Curva in $\mathbb{R}^n$)**.**
Una *curva* è una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua. $\gamma([a,b])$ è detto il *supporto* della curva γ. Una curva è *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Come abbiamo fatto prima definiamo la lunghezza di una curva e la nozione di rettificabilità

Definizione 12.71 (Lunghezza di una curva)**.**
Posta $\pi = \{t_0, \cdots, t_N\}$ una generica suddivisione di $[a,b]$ definiamo la *lunghezza* di una curva γ come

$$L(\gamma) = \sup_\pi \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \right\} \in [0, +\infty].$$

Una curva γ è *rettificabile* se $L(\gamma) \in [0, +\infty)$.

Proposizione 12.72.
Data $\gamma \in C^1$ essa è rettificabile e $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(x)|dx$.

Dimostrazione. Mostriamo la doppia disuguaglianza:
$\leq$) Fissiamo π suddivisione di $[a, b]$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale 12.43

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)|dt.$$

Sommando al variare di i abbiamo

$$\sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt,$$

ma dato che π è arbitraria vediamo che

$$L(\gamma) = \sup_\pi \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

$\geq$) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $\gamma \in C^1([a, b])$, abbiamo che γ' è continua su $[a, b]$ e quindi per Heine-Cantor 12.17 anche uniformemente continua. Allora $\exists \delta$ t.c. $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Consideriamo quindi π_ε tale che $\max\{t_{i+1} - t_i\} < \delta$, in modo tale che

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon \qquad \forall s, t \in [t_i, t_{i+1}].$$

In particolare abbiamo che

$$\left| \gamma'(t) - \fint_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)ds \right| < \varepsilon \qquad \forall t \in [t_i, t_{i+1}],$$

ma allora abbiamo

$$|\gamma'(t)| - \left| \fint_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)ds \right| \leq \left| \gamma'(t) - \fint_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)ds \right| < \varepsilon.$$

Passando alla media integrale, osservando che la media di una costante è la costante stessa, abbiamo

$$\varepsilon > \fint_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| - \left| \fint_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)ds \right| dt = \fint_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)|dt - \left| \fint_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)ds \right|.$$

Moltiplicando per $t_{i+1} - t_i$

$$(t_{i+1} - t_i)\varepsilon + \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)ds \right| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)|dt,$$

e sommando in i

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq& \varepsilon(b - a) + \sum_{i=0}^{N-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s)ds \right| = \\
=& \varepsilon(b - a) + \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \\
\leq& \varepsilon(b - a) + L(\gamma).
\end{aligned}$$

Ma ε è arbitrario, quindi abbiamo $\displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq L(\gamma)$. $\square$

Osservazione 12.73.
Il risultato è vero anche nel caso di curve lipschitziane.

Osservazione 12.74.
La lunghezza misura il "cammino" percorso, quindi se γ non è iniettiva abbiamo una lunghezza contata con molteplicità

Definizione 12.75 (Velocità di una curva)**.**
Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva, definiamo γ' la *velocità* della curva e, nel caso $\gamma'(t) \neq 0$ poniamo $\tau(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ il *vettore tangente* alla curva γ.

Analizziamo quindi i casi particolari principali

Osservazione 12.76.
Nel caso $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (t, f(t))$ per qualche $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile abbiamo

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{1^2 + (f'(t))^2} dt,$$

come visto prima.

Osservazione 12.77.
Data $\rho(\theta) : [\theta_1, \theta_2] \to [0, +\infty)$ continua consideriamo la curva

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta \sin \theta)).$$

Se $\rho \in C^1$ abbiamo $\gamma \in C^1$, da cui

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\gamma'(\theta)| d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho'(\theta) \cos \theta - \rho \sin \theta)^2 + (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)^2} d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

Capitolo 13

Equazioni Differenziali Ordinarie

13.1 Definizioni

Vorremmo studiare equazioni dove l'incognita è una funzione. In particolare vorremmo studiare come le informazioni sulle derivate della funzione, l'incognita e la funzione stessa interagiscono e riconoscere classi di soluzioni.

Definizione 13.1 (Equazione differenziale)**.**
Data $y(x) : I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte definiamo

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$$

una *equazione differenziale* (ordinaria) di *ordine n*.
Se F non dipende da x l'equazione di dice *autonoma.*
Se F è lineare affine nelle $y^{(j)}$, ovvero se

$$F(x, y(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x) y^{(j)}(x) + b(x),$$

allora l'equazione differenziale è detta *lineare* e se $b(x) = 0$ è detta in particolare *lineare omogenea.*

Osservazione 13.2.
In generale le soluzioni ad una equazione differenziale non sono uniche, per esempio ogni funzione polinomiale data da $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ è soluzione dell'equazione $y^{(n)} = 0$.

Per cercare di limitare il numero di soluzioni possiamo imporre delle "condizioni iniziali" alla nostra equazione. Questo concetto viene formalizzato dal *Problema di Cauchy.*

Definizione 13.3 (Problema di Cauchy)**.**
Un *problema di Cauchy* per una equazione differenziale ordinaria in $y : I \to \mathbb{R}$ è dato da un sistema del tipo seguente:

$$\begin{cases} F(x, y(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases},$$

dove $x_0, y_0, \cdots, y_{n-1} \in I$.

In molti casi ci aspettiamo una soluzione unica al problema di Cauchy (come per $y^{(n)} = 0$), ma non è vero in generale. Per esempio il problema

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette come soluzioni sia $y(x) = 0$ che $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2/4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Vedremo che il motivo per cui le soluzioni in questo caso non sono uniche è legato alla discontinuità della derivata.

13.2 Equazioni del primo ordine

Definizione 13.4 (Equazione differenziale del primo ordine in forma normale)**.**
Una equazione differenziale del primo ordine è detta in *forma normale* se

$$F(x, y(x), y'(x)) = f(x, y(x)) - y'(x)$$

con $f : [a, b] \times y([a, b]) \to \mathbb{R}$. Dato $x_0 \in (a, b)$ i problemi di Cauchy per queste equazioni sono della forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Adottando la notazione della definizione appena data, è possibile, con tecniche che non tratteremo in questa sede, mostrare il seguente teorema:

Teorema 13.5 (Cauchy-Lipschitz/Esistenza e unicità locale)**.**
Se f è continua in (x, y) e lipschitziana in y (cioè $\forall x \in [a, b]$ abbiamo $f(x, \cdot) : y([a, b]) \to \mathbb{R}$ Lipschitziana), allora $\exists \delta > 0$ con $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ tale che $\exists!\ y \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 13.6 (Cauchy-Peano)**.**
Se f è continua $\exists y \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ t.c. $y'(x) = f(x, y(x))$, ma in generale non è unica.

Osservazione 13.7 (Baffo di Peano)**.**
Nelle condizioni più deboli del teorema di Cauchy-Peano non è garantita l'unicità delle soluzioni. L'insieme delle soluzioni per un dato problema di Cauchy che rispetta le ipotesi di Cauchy-Peano ma non Cauchy-Lipschitz è detto *baffo di Peano* o *Pennello di Peano*.

Forti di questa condizione possiamo dare tutte le soluzioni alle equazioni lineari del primo ordine in forma normale.

Proposizione 13.8.
Date $a(x), b(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, le soluzioni all'equazione

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

sono della forma

$$y(x) = Ce^{A(x)} + \int e^{A(x)-A(s)} b(s) ds$$

con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ e $C \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Riscriviamo l'equazione come

$$y'(x) - a(x)y(x) = b(x)$$

e, posta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, moltiplichiamo etrambi i membri per $e^{-A(x)}$

$$e^{-A(x)}b(x) = e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = \left(e^{-A(x)}y(x)\right)'.$$

Integrando in x abbiamo

$$e^{-A(x)}y(x) = \int e^{-A(t)}b(t)dt + C$$

con $C \in \mathbb{R}$, da cui

$$y(x) = Ce^{A(x)} + \int e^{A(x)-A(t)}b(t)dt$$

□

Corollario 13.9.
Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione, ovvero

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}b(t)dt$$

con $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)dt$. La soluzione è unica in quanto definita globalmente e l'equazione rispetta le condizioni del teorema di esistenza e unicità locale.

Il teorema di esistenza e unicità ci garantisce solo una palla attorno al punto iniziale scelto, ma risolvendo nuovamente l'equazione ponendo alla funzione i valori ottenuti agli estremi di questi intervalli dovremmo essere in grado di estendere le soluzioni.

Siamo quindi interessati a cercare soluzioni che occupino la massima parte del dominio fornitoci.

Definizione 13.10 (Soluzione massimale)**.**
Posta $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ e dato problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

una soluzione $y \in C^1(\text{int } I), x_0 \in \text{int } I, y(x_0) = y_0$ è definita *massimale* se $\forall z \in C^1(I')$ soluzioni del problema di Cauchy abbiamo $I' \subseteq I$.

Osservazione 13.11.
Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità 13.5 $\exists! y \in C^1(I)$ soluzione massimale del problema di Cauchy con $I \subseteq [a, b]$.

Mostriamo che le soluzioni massimali proseguono finché possono:

Teorema 13.12 (Degli asintoti)**.**
Posta $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua e Lipschitziana nel secondo argomento e dato problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

abbiamo che data $y \in C^1([a', b'])$ la soluzione massimale valgono le seguenti proposizioni:

- $b' = b$ oppure $(b' < b$ e $\lim_{x \to b'^-} y(x) \in \{c, d\})$
- $a' = a$ oppure $(a' > a$ e $\lim_{x \to a'^+} y(x) \in \{c, d\})$

Dimostrazione. Mostriamo la prima affermazione, l'altra è analoga. Osserviamo che se

$$\exists \lim_{x \to b'^-} y(x) = \alpha \in [c, d],$$

allora $\alpha \in \{c, d\}$, altrimenti, risolvendo il problema di Cauchy con $y(b') = \alpha$ potremmo trovare per esistenza e unicità 13.5 una soluzione z definita su $[b' - \delta, b' + \delta] \nsubseteq [a', b']$, assurdo perché y massimale $\lightning$.

Quindi basta mostrare che esiste il limite. Supponiamo per assurdo che

$$\limsup_{x \to b'^-} y(x) = \ell^+ > \ell^- = \liminf_{x \to b'^-} y(x),$$

allora $\exists a_n, b_n$ successioni che tendono a b' tali che $y(a_n) \to \ell^+$ e $y(b_n) \to \ell^-$. Osserviamo inoltre che $|b_n - a_n| = o(1)$. Quindi per per Lagrange 11.34 $\exists x_n \in (a_n, b_n)$ tale che $|y'(x_n)| = \left|\frac{\ell^+ - \ell^- + o(1)}{o(1)}\right| \to +\infty$. Allora abbiamo definito $x_n \to b'$ tale che

$$|y'(x_n)| = |f(x_n, y(x_n))| \to +\infty,$$

ma questo è assurdo perché definitivamente in n, $\exists \varepsilon > 0$ tale che

$$|f(x_n, y(x_n))| \leq \max_{[b' - \delta, b'] \times [\ell^+ - \varepsilon, \ell^- + \varepsilon]} |f(x, y)| \in \mathbb{R}.$$

□

Corollario 13.13.
Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora

- $b' = +\infty$ oppure $\lim_{x \to b'^-} y(x) = \pm\infty$
- $a' = -\infty$ oppure $\lim_{x \to a'^+} y(x) = \pm\infty$

13.2.1 Studio qualitativo

Teorema 13.14 (Confronto)**.**
Date $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ soluzioni di $y' = f(x, y)$, I intervallo, con f continua e (localmente) Lipschitsziana in y abbiamo

- $\forall x \in I,\ y_1(x) > y_2(x)$
- $\forall x \in I,\ y_1(x) < y_2(x)$
- $\forall x \in I,\ y_1(x) = y_2(x)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ per qualche $x_0 \in I$. Per esistenza e unicità abbiamo che $\forall x \in I,\ y_1(x) = y_2(x)$. $\square$

Definizione 13.15 (Sopra/sotto soluzione)**.**
$y \in C^1(I)$ è una *sopra soluzione* (rispettivamente *sotto soluzione*) di $y' = f(x, y)$ se

$$y'(x) \lesseqgtr f(x, y(x)) \qquad \forall x \in I.$$

Le sopra/sotto soluzioni si dicono *strette* se la disuguaglianza sopra è stretta.

Teorema 13.16.
Date $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ con y_1 sopra soluzione e y_2 sotto soluzione di $y' = f(x, y)$, di cui una delle due è stretta, per $x_0 \in I$ abbiamo

- $y_1(x_0) \geq y_2(x_0) \implies y_1(x) > y_2(x),\ \forall x > x_0$
- $y_1(x_0) \leq y_2(x_0) \implies y_1(x) < y_2(x),\ \forall x < x_0$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima proposizione, la seconda si ottiene in modo analogo. Osserviamo che se $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ allora dal fatto che $y_1'(x_0) > f(x_0, y(x_0)) \geq y_2'(x_0)$ troviamo $y_1(x) > y_2(x)$ per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Possiamo quindi supporre $y_1(x_0) > y_2(x_0)$. Per assurdo supponiamo che $\exists x_1 > x_0$ t.c. $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ e $\forall x \in (x_0, x_1),\ y_1(x) > y_2(x)$, allora per Lagrange 11.34 $\exists \xi \in (x_0, x_1)$ t.c. $y_1'(\xi) \leq y_2'(\xi)$, assurdo $\lightning$. $\square$

Teorema 13.17 (Esistenza globale)**.**
Data y soluzione massimale di $y' = f(x, y(x))$ tale che $|f(x, y(x))| \leq a(x) + b(x)|y|$ con a, b continue positiva, abbiamo che y è definita globalmente.

Dimostrazione. Le equazioni lineari $y' = a(x) \pm b(x)y$ hanno soluzioni globali esplicite le quali ci permettono di evitare asintoti per y usando il confronto. $\square$

13.2.2 Equazioni separabili

Definizione 13.18 (Equazione differenziale separabile)**.**
Un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale $y' = F(x, y)$ è detta *separabile* se $F(x, y) = f(y)a(x)$.

Se $a(x) = 1$ allora l'equazione si dice *autonoma*.

Studiamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x))a(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

per a, f continue e f localmente Liepschitziana.

Osserviamo che se $f(y_0) = 0$ allora $y(x) = y_0$ è una soluzione costante. Se $y_0 \neq 0$ chiamiamo J_0 la componente connessa di $\{y \mid f(y) \neq 0\}$ che contiene y_0. Per definizione f non cambia segno su J_0, quindi in questo intervallo

$$\frac{y'(x)}{f(y(x))} = a(x).$$

Poste G e A tali che $G' = 1/f$ e $A' = a$ (esistono dato che $0 \notin f(J_0)$ e f, a continue 12.28) abbiamo

$$\frac{d}{dx}(G(y(x))) = \frac{d}{dx}(A(x)).$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale 12.43 abbiamo integrando da x_0 a x

$$G(y(x)) - G(y(x_0)) = A(x) - A(x_0)$$
$$G(y(x)) = G(y_0) + A(x) - A(x_0).$$

Allora per gli x tali che $G(y_0) + A(x) - A(x_0) \in G(J_0)$ abbiamo

$$y(x) = G^{-1}(A(x) + G(y_0) - A(x_0)).$$

Riassumiamo in una proposizione:

Proposizione 13.19.
Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x))a(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con f, a continue, f localmente Lipschitziana abbiamo che:
Se $f(y_0) = 0$ allora $y(x) = y_0$ è la soluzione del problema.
Se $f(y_0) \neq 0$ allora $\exists J_0$ intorno di x_0 dove f non cambia segno. e, poste G, A primitive di $1/f$ e a rispettivamente, abbiamo

$$G(y(x)) = G(y_0) + A(x) - A(x_0).$$

Nel caso $G(y_0) + A(x) - A(x_0) \in G(J_0)$ troviamo un'espressione per y:

$$y(x) = G^{-1}(A(x) + G(y_0) - A(x_0)).$$

13.3 Equazioni lineari di ordine superiore

Osserviamo che quanto detto sulle equazioni del primo ordine si generalizza in modo naturale al caso di sistemi di più equazioni

Teorema 13.20 (Cauchy-Lipschitz esteso)**.**
Dati $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}^n$, $(x_0, \vec{y}_0) \in I \times J$, $f : I \times J \to \mathbb{R}^n$ continua e localmente lipschitziana su ogni coordinata di $\vec{y}$, abbiamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = f(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

ammette localmente un'unica soluzione. Inoltre se $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e

$$|f(x, \vec{y})| \leq \alpha(x)|\vec{y}| + \beta(x), \qquad \alpha, \beta \geq 0 \text{ continue}$$

allora la soluzione è definita su I.

Consideriamo un'equazione differenziale lineare della forma

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = b(x)$$

con $a_j : I \to \mathbb{R}$ continue. Possiamo ricondurre questa equazione ad un sistema come sopra ponendo $y_j(x) = u^{(j)}(x)$ per $0 \leq j \leq n-1$. Troviamo infatti

$$\begin{cases} y_j'(x) = (u^{(j)}(x))' = u^{(j+1)}(x) = y_{j+1}(x) & \text{per } 0 \leq j \leq n-1 \\ y_{n-1}'(x) = u^{(n)}(x) = b(x) - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)u^{(j)}(x) & \text{per } j = n \end{cases}$$

Possiamo riassumere queste relazioni in una equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + B(x) = A(x) \begin{pmatrix} y_0(x) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x) \end{pmatrix} + B(x).$$

dove

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Troviamo quindi che risolvere l'equazione differenziale è equivalente a risolvere questo sistema, inoltre per Cauchy-Lipschitz 13.5 la soluzione del sistema è unica fissate le condizioni iniziali, quindi (posto $Lu \doteqdot u^{(n)} + \sum a_i(x)u^{(i)}(x)$) anche il sistema

$$\begin{cases} Lu = b \\ u^{(j)}(x_0) = c_j \quad 0 \le j \le n-1 \end{cases}$$

ha una soluzione unica.

13.3.1 Struttura delle soluzioni

Come avevamo cominciato a intuire quando abbiamo introdotto i problemi ci Cauchy, l'insieme delle soluzioni di molte equazioni differenziali di ordine n ha n gradi di libertà. Nel caso delle equazioni lineari possiamo confermare questa idea grazie al seguente risultato:

Proposizione 13.21.
L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare di ordine n

$$Lu = b$$

è uno spazio affine di dimensione n.

Dimostrazione. Siano u_1, u_2 soluzioni di $Lu = b$ e poniamo $w = u_1 - u_2$. Osserviamo che $Lw = 0$, infatti

$$Lw = L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = b - b = 0.$$

Osserviamo che $L : C^n(I) \to C^0(I))$ lineare e che le soluzioni di $Lw = 0$ sono per definizione $\ker L$, quindi esse sono uno spazio vettoriale.

Consideriamo w_k la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lw = 0 \\ w^{(j)}(x_0) = \delta_{kj} \end{cases}$$

con δ_{kj} la delta di Kronecker. Mostriamo che $\{w_k \mid 0 \le k \le n-1\}$ è una base di $\ker L$:
<u>*lin.ind.*</u>) Consideriamo una combinazione lineare nulla $0 = \sum \mu_k w_k$ e deriviamo ℓ volte

$$0 = D^\ell(\sum \mu_k w_k) = \sum \mu_k w_k^{(\ell)}$$

valutando in x_0

$$0 = \sum \mu_k w_k^{(\ell)}(x_0) = \sum \mu_k \delta_{k\ell} = \mu_\ell.$$

Ma ℓ era arbitrario, quindi abbiamo dimostrato che la combinazione è effettivamente la combinazione banale.
<u>*genera*</u>) Se $Lu = 0$ poniamo $\mu_k = u^{(k)}(x_0)$ e consideriamo $\overline{u} = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k$. Osserviamo che per la linearità di L, $L\overline{u} = 0$ e inoltre $\overline{u}^{(\ell)}(x_0) = \sum \mu_k w_k^{(\ell)}(x_0) = \mu_\ell$. Ma allora sia u che $\overline{u}$ sono soluzioni di

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u^{(\ell)}(x_0) = \mu_\ell \end{cases}$$

quindi per unicità coincidono, ovvero u è combinazione lineare dei w_k.

Abbiamo quindi che $\ker L$ ha una base di n elementi, ovvero $\dim \ker L = n$, e quindi anche lo spazio affine delle soluzioni ha dimensione n. □

Osservazione 13.22.
Ogni soluzione di $Lu = b$ si ottiene da una soluzione particolare $Lu_0 = b$ sommando una combinazione dei w_k, cioè u è della forma

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k.$$

13.3.2 Equazioni a coefficienti costanti

Consideriamo un caso particolare delle equazioni differenziali lineari di ordine n, ovvero quelle a coefficienti costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = b(x), \qquad a_j \in \mathbb{R}.$$

Indichiamo l'operatore derivata con D, ovvero

$$D : \begin{array}{ccc} C^\infty(I) & \longrightarrow & C^\infty(I) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}.$$

Esso è un endomorfismo di $C^\infty(I)$. Osserviamo allora che l'equazione è esprimibile in termini di un polinomio valutato dell'operatore derivata:

$$\mathbb{R}[t] \ni P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0 \implies$$

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = P(D)u.$$

Come visto nella sottosezione precedente, possiamo separare il problema della ricerca delle soluzione dell'equazione completa nella ricerca di una soluzione particolare e di tutte le soluzioni dell'omogenea. Studiamo ora la seconda.

Caso omogeneo

Fattorizziamo $P(t)$ nei complessi come

$$P(t) = \prod_{j=1}^{r}(t - \lambda_i)^{m_j}$$

con λ_i distinti. Osserviamo che $\dim\ker P(D) = n$ e che $D|_{\ker P(D)}$ è un endomorfismo di $\ker P(D)$, dato che

$$D \circ P(D) = (t \cdot P)(D) \implies D(\ker P(D)) = \ker(t \cdot P)(D) \subset \ker P(D).$$

Per semplicità notazionale scriveremo D al posto di $D|_{\ker P(D)}$ e λ al posto di λI.

Data la fattorizzazione di prima, scriviamo la seguente decomposizione di $\ker P(D)$ grazie al teorema di decomposizione primaria:

$$\ker(P(D)) = \bigoplus_{j=1}^{r}\ker(D - \lambda_i)^{m_j}.$$

(Per chi deve ripassare ancora geometria tra poco daremo anche una dimostrazione.)

Studiamo allora il comportamento dei $\ker(D - \lambda_j)^{m_j}$.

Proposizione 13.23.
$\ker(D - \lambda)^m = \{q(x)e^{\lambda x} \mid q \in \mathbb{C}_{m-1}[x]\}$.
(Ricordiamo che $\mathbb{K}_k[t] = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid \deg p \leq k\}$).

Dimostrazione. Procediamo per passi. Osserviamo che $\ker D^m = \mathbb{C}_{m-1}[x]$:
$\supset$) ovvio.
$\dim = \dim$) Abbiamo mostrato che $\dim\ker D^m = m$ e $\dim \mathbb{C}_{m-1}[x]$ è chiaramente m.

Osserviamo che, ponendo $(E_\lambda u)(x) = u(x)e^{\lambda x}$ abbiamo che $D - \lambda = E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda}$, infatti

$$E_\lambda \circ D \circ E_{-\lambda}u = E_\lambda \circ D(ue^{-\lambda x}) = E_\lambda(u'e^{-\lambda x} - \lambda ue^{-\lambda x}) = u' - \lambda u = (D - \lambda)u.$$

Da questo discende elevando a potenza che $(D - \lambda)^m = E_\lambda \circ D^m \circ E_{-\lambda}$.

Siamo ora pronti per mostrare la tesi:
$\dim = \dim$) Stessa motivazione di prima.
$\supset$)

$$(D - \lambda)^m q(x)e^{\lambda x} = E_\lambda D^m E_{-\lambda}(q(x)e^{\lambda x}) = E_\lambda D^m(q(x)) = 0.$$

$\square$

Per dimostrare la veridicità della decomposizione ci serve il seguente lemma:

Lemma 13.24.
Se $\lambda \neq \mu$ allora $(D - \mu)|_{\ker(D-\lambda)^m} \in GL(\ker(D - \lambda)^m)$

Dimostrazione. Dato $u \in \ker(D-\lambda)^m$ osserviamo che

$$(D-\lambda)^m((D-\mu)u) = (D-\mu)(D-\lambda)^m(u) = (D-\mu)(0) = 0$$

quindi $\ker(D-\lambda)^m$ è $(D-\mu)-$invariante, ovvero

$$(D-\mu)|_{\ker(D-\lambda)^m} \in \mathrm{End}\,(\ker(D-\lambda)^m).$$

Come abbiamo visto sopra, un elemento di $\ker(D-\lambda)^m$ è della forma $u(x) = q(x)e^{\lambda x}$ con $q(x) \in \mathbb{C}_m[x]$. Applichiamo allora $(D-\mu)$ a $u(x)$:

$$(D-\mu)(q(x)e^{\lambda x}) = (q'(x) + \lambda q(x))e^{\lambda x} - \mu q(x)e^{\lambda x} = (q' + (\lambda-\mu)q)e^{\lambda x}.$$

Dato che $\lambda \neq \mu$, abbiamo che, se $q' + (\lambda-\mu)q = 0$, il termine di testa di q è nullo (dato che $\deg q' < \deg q$), ma allora lo è anche quello di q'. Reiterando questo argomento troviamo che $q' + (\lambda-\mu)q = 0 \implies q = 0$, ovvero

$$\ker(D-\mu)|_{\ker(D-\lambda)^m} = \{0\},$$

ed essendo lineare questo ci permette di concludere che $D-\mu$ è iniettiva, e quindi invertibile in quanto endomorfismo. □

Teorema 13.25.
$\ker(P(D)) = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{r} \ker(D-\lambda_i)^{m_j}$.

Dimostrazione. Il contenimento del lato destro nel sinistro è ovvio, inoltre

$$\dim\ker(P(D)) = \deg P = \sum_{j=1}^{r} m_j,$$

quindi ci basta verificare che la somma è effettivamente una somma diretta.

Siano $\vec{v}_i \in \ker(D-\lambda_i)^{m_i}$ dei vettori tali che $\sum_{i=1}^{r} \vec{v}_i = 0$. Dato $1 \leq j \leq r$ mettiamo il evidenza il $j-$esimo fattore di P

$$P(t) = \hat{P}_j(t)(t-\lambda_j)^{m_j}, \quad \hat{P}_j(t) = \prod_{i=1, i\neq j}^{r} (t-\lambda_i)^{m_i}$$

e valutiamo questo sulla somma:

$$0 = \hat{P}_j(D)(\sum_{i=1}^{r} \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{r} \hat{P}_j(D)(\vec{v}_i) = \hat{P}_j(D)(\vec{v}_j).$$

Osserviamo che $\hat{P}_j(D)|_{\ker(D-\lambda_j)^{m_j}}$ è composizione di elementi di $GL(\ker(D-\lambda_j)^{m_j})$, dunque esso stesso è un elemento del gruppo lineare. Ma allora, dato che $0 = \hat{P}_j(D)(\vec{v}_j)$ e $\vec{v}_j \in \ker(D-\lambda_j)^{m_j}$ scopriamo che $\vec{v}_j = 0$. Essendo j arbitrario abbiamo scoperto che ogni termine della somma è nullo, quindi la somma dei nuclei è diretta. □

Abbiamo quindi trovato un modo per caratterizzare le soluzioni dell'equazione omogenea, ma al costo di introdurre funzioni a priori complesse, per esempio nel caso di $P(t) = t^2 + 1$ la decomposizione ha la forma

$$\ker(D-i) \oplus \ker(D+i) = \{ae^{ix} + be^{-ix},\ a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Ricordiamo però che dato $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ esso ha radici reali o complesse coniugate a coppie, quindi per superare questa difficoltà ci basta studiare

$$C^\infty(I, \mathbb{R}) \cap (\ker(D-\xi)^m \oplus \ker(D-\overline{\xi})^m) \doteqdot K(\xi, m).$$

Se $\xi = \alpha + i\beta$ abbiamo

$$\begin{aligned} K(\xi, m) =& C^\infty(I, \mathbb{R}) \cap \{q_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + q_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \mid q_1, q_2 \in \mathbb{C}_{m-1}[x]\} = \\ =& \{e^{\alpha x}(\Re(q_1+q_2)\cos(\beta x) + \Im(q_1-q_2)\sin(\beta x)) \mid q_1, q_2 \in \mathbb{C}_{m-1}[x]\} \\ =& \{e^{\alpha x}(p_1\cos(\beta x) + p_2\sin(\beta x)) \mid p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{m-1}[x]\}. \end{aligned}$$

Soluzione particolare

Trovare una soluzione particolare non è facile in generale, quindi considereremo solo i casi dove $b \in \ker(D-\mu)^\ell$.

Proposizione 13.26.
Data l'equazione differenziale $P(D)u = b$ abbiamo che

- Se $P(\mu) \neq 0$ allora $\exists!$ soluzione dell'equazione della forma $u(x) = q(x)e^{\mu x}$ con $q \in \mathbb{R}_{\ell-1}[x]$.
- Se $P(\mu) = 0$ allora $\exists!$ soluzione dell'equazione della forma $x^m q(x)e^{\mu x}$ con $q \in \mathbb{R}_{\ell-1}[x]$.

Dimostrazione. Osserviamo che $P(D)|_{\ker(D-\mu)^\ell} \in \operatorname{End}(\ker(D-\mu)^\ell)$.
($\star$) Se $P(\mu) \neq 0$ abbiamo che $P(D)$ è invertibile su $\ker(D-\mu)^\ell$, quindi, dato che $q(x)e^{\mu x} \in \ker(D-\mu)^\ell$, abbiamo il primo punto.
($\star$) Se $P(\mu) = 0$, cioè $\exists i$ t.c. $\mu = \lambda_i$. Usando la notazione di prima, evidenziamo questa radice $P(D) = \hat{P}(D)(D-\mu)^m$ con $\hat{P}(\mu) \neq 0$. Osserviamo che

$$P(D) : \{x^m u \mid u \in \ker(D-\mu)^\ell\} = x^m \ker(D-\mu)^\ell \to \ker(D-\mu)^\ell$$

è un isomorfismo, infatti

$$x^m \ker(D-\mu)^\ell \xrightarrow{(D-\mu)^m} \ker(D-\mu)^\ell \xrightarrow{\hat{P}(D)} \ker(D-\mu)^\ell.$$

Quindi per $b \in \ker(D-\mu)^\ell$, $\exists!$ $a \in x^m \ker(D-\mu)^\ell$ t.c. $P(D)a = b$. □

Considerando quindi una soluzione di queste forme sappiamo che l'equazione ci permetterà di determinare una soluzione univoca.

13.3.3 Equazioni lineari del secondo ordine

Nel caso specifico delle equazioni del secondo ordine esiste un metodo per determinare una soluzione particolare

Teorema 13.27 (Metodo di variazione delle costanti)**.**
Definendo l'operatore differenziale $Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0u$, date w_1, w_2 soluzioni di $Lw = 0$ linearmente indipendenti ($\operatorname{Span}(w_1, w_2) = \ker Lw$) possiamo ricavare una soluzione particolare di $Lu = b$, e quindi trovare tutte le soluzioni.

Dimostrazione. Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x) = c_1(x)w_1(x) + c_2(x)w_2(x).$$

Poniamo inoltre $c_1'(x)w_1(x) + c_2'(x)w_2(x)$, in modo che

$$u'(x) = c_1w_1' + c_2w_2',$$

$$u'' = c_1'w_1' + c_2'w_2' + c_1w_1'' + c_2w_2'',$$

da cui

$$Lu = b \iff c_1\cancelto{0}{(Lw_1)} + c_2\cancelto{0}{(Lw_2)} + c_1'w_1' + c_2'w_2' = b.$$

Ci riconduciamo a risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'w_1 + c_2'w_2 = 0 \\ c_1'w_1' + c_2'w_2' = b \end{cases} \iff \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che il determinante della matrice $\Delta = w_1w_2' - w_1'w_2$ è non nullo, infatti, essendo w_1 e w_2 linearmente indipendenti, se fosse nullo avremmo $w_1' = w_2' = 0$, da cui w_1 e w_2 costanti, assurdo perché linearmente indipendenti $\lightning$.

Possiamo quindi invertire la matrice:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} w_2' & -w_2 \\ -w_1' & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c_1' = -\frac{w_2 b}{\Delta} \\ c_2' = \frac{w_1 b}{\Delta} \end{cases}$$

Integrando le due equazioni del sistema troviamo c_1 e c_2. Sommando a $u = c_1w_1 + c_2w_2$ una combinazione lineare di w_1 e w_2 troviamo uno spazio affine di dimensione 2 contenuto nello spazio delle soluzioni a $Lu = b$, abbiamo quindi determinato tutte le soluzioni. □

Capitolo 14

Ringraziamenti

Ringrazio i seguenti per aver collaborato nella stesura di alcune parti, per aver offerto consigli su come migliorare le dispense in generale o per aver segnalato degli errori:

- Federico Allegri
- Tommaso Bellanova
- Lorenzo Bonetti
- Mattia Buratti
- Leonardo Ciuffreda
- Lorenzo Contorni
- Alessandro Fenu
- Leonardo Migliorini
- Clementina Salamina

Purtroppo ho una memoria oscena, prego tutti coloro che hanno contribuito e che non ho inserito a scrivermi in modo da aggiungervi.
Vi prego anche di scrivere il cognome se non vi ho già inseriti. Anche se vi conosco per nome è possibile che non sappia il vostro cognome.